OM KAPITLET

I dette kapitel om tal og regning skal eleverne arbejde med tallene og deres egenskaber indenfor de fire talmængder N, Z, Q og R.

Eleverne skal arbejde med tallene i forskellige sammenhænge i hverdagen, og de skal bruge dem til at løse matematiske problemer. Eleverne skal tillige undersøge egenskaber og regnemetoder ved potenser og rødder.

En del opgaver i dette kapitel er formuleret, så der er flere mulige facit, da resultatet på forskellig måde afhænger af elevernes valg. Til disse opgaver anføres eksempelvis *Elevernes egne svar* eller *Elevernes egne forklaringer*. I disse tilfælde gives der ofte eksempler.

ELEVMÅL FOR KAPITLET

Målet er, at eleverne:

- kan forstå opbygningen af titalssystemet samt andre talsystemer
- kan forstå og anvende regningsarternes hierarki
- kan argumentere for sammenhængen mellem forskellige repræsentationer af samme tal
- kan vælge en relevant måde at skrive tal på, alt efter situationen tallene bruges i
- kan undersøge egenskaber ved rødder og potenser
- kan undersøge og anvende forskellige regneregler for rødder og potenser
- kan kende forskel på og anvende irrationale og rationale tal.

HUSKELISTE

PRINTARK

- E1 Begreber og fagord – Tal og regning

MATERIALER

- Centicubes
- Målepinde på minimum 50 cm

DIGITALE VÆRKTØJER

- Regneark

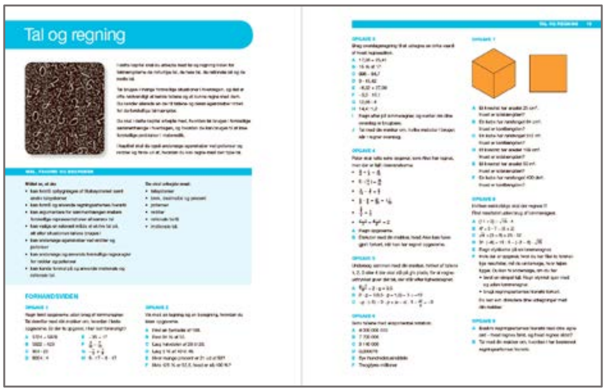
FAGLIGE BEGREBER

I kapitlet arbejdes med følgende centrale fagord og begreber:

- Talsystemer
- Brøk, decimaltal og procent
- Potenser
- Rødder
- Rationale tal Q
- Irrationale tal.

FÆLLES MÅL

På MULTIs hjemmeside er der en oversigt over, hvilke Fælles Mål der er sat op for arbejdet med kapitlet.



UDDYBENDE VEJLEDNING OG FACITLISTE

OPGAVE 1

A 9700
B 4899
C 7600
D 2001
E -18
F $-\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$
G $\frac{4}{9}$
H -51

Sammenligning af resultater og makkersamtale om løsningsmetoder.

OPGAVE 2

Opgaverne skal løses ved tegning *og* beregning. Her anføres blot resultaterne:

A 42
B 42
C 42
D 42
E 42 %
F 42

OPGAVE 3

Overslagsregning. Her anføres de eksakte resultater:

A 40,99
B 2,55
C 901,3
D 46,26
E 20,77
F -33,33
G 3,14
H 12
I Efterregning og vurdering.
J Makkersamtale om overslagsmetoder.

OPGAVE 4

A Resultatet af opgaverne er:

$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

$\frac{3}{14}$

$\frac{12}{45} = \frac{4}{15}$

$\frac{1}{9}$

$\frac{4}{2} = 2$

B Makkerdiskussion.

OPGAVE 5

A $g = 4$
B $g = 3$
C $g = 3$

OPGAVE 6

A $4 \cdot 10^{9}$
B $7{,}7 \cdot 10^{6}$
C $3{,}14 \cdot 10^{6}$
D $7{,}6 \cdot 10^{-5}$
E $7 \cdot 10^{-5}$
F $4{,}3 \cdot 10^{7}$

OPGAVE 7

A Sidelængden er 5 cm.
B Kantlængden er 4 cm.
C Kantlængden er 8 cm.
D Sidelængden er 13 cm.
E Sidelængden er $\sqrt{50}$ (= $5\sqrt{2} \approx 7{,}07$) meter.
F Kantlængden er $\sqrt[3]{400} \approx 7{,}37$ dm.

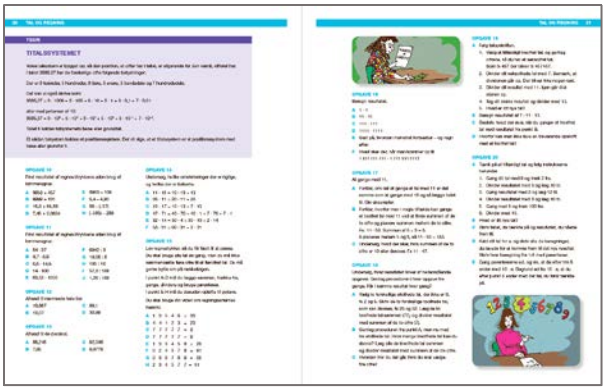
OPGAVE 8

A -2
B 89
C 807
D -109
E Stykkerne i punkt A-D regnes på lommeregner.
F Eventuelt fejlretning og diskussion af udregninger.

Først udregnes potenser og rødder, så produkter og kvotienter og til sidst summer og differenser. Ønsker man udregninger i en anden rækkefølge, skal man sætte parenteser.

OPGAVE 9

A Elevernes egne sproglige beskrivelser af regningsarternes hierarki.
B Makkersamtale om beskrivelserne af regningsarternes hierarki.



UDDYBENDE VEJLEDNING OG FACITLISTE

OPGAVE 10

A 4115
B 10100
C 84,49
D 7,5134
E 8854
F 1,47
G 93
H -874

OPGAVE 11

A 1998
B 41,83
C 8,76
D 1400
E 63 520
F 2314
G 3,81
H 18,5
I 0,578
J 0,0125

OPGAVE 12

A 20
B 10
C 100
D 30

OPGAVE 13

A 56,2
B 8,0
C 62,0
D 10,0

OPGAVE 14

A Omskrivningen eller mellemregningen er rigtig.
B Omskrivningen eller mellemregningen er forkert.
C Omskrivningen eller mellemregningen er rigtig.
D Omskrivningen eller mellemregningen er rigtig.
E Omskrivningen eller mellemregningen er rigtig.
F Omskrivningen eller mellemregningen er rigtig.

OPGAVE 15

Elevernes egne svar. Eleverne kan eksempelvis lave følgende regnestykker, så facit passer.

A $3 \cdot (4 + 5) + 1 \cdot 6 = 23$
B $4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 = 23$
C $7 + (7 : 7) + 7 - 7 = 8$
D $7 + (7 : 7) + (7 : 7) = 9$
E $3^3 + (5 - 4) \cdot 1^8 = 28$
F $2^7 - 4 \cdot 8 - 5 + 0 = 91$
G $6 \cdot 9 + 8 - 7 + 3^0 = 56$
H $2 + 4 + 5 + 3 \cdot (7 - 7) = 11$

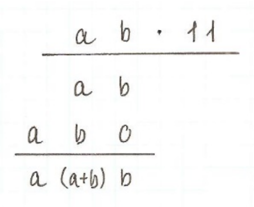
OPGAVE 16

A 1
B 121
C 12 321
D 1 234 321
E Eleverne gætter på, hvordan mønsteret fortsætter.
F Der dukker to nuller op midt i det hele. Resultatet er: 12 345 678 900 987 654 321.
Det kan muligvis være sjovt for nogle elever at udtale tallet: 12 trillioner, 345 billiarder, 678 billioner, 900 milliarder, 987 millioner, 654 tusinde – og 321.

OPGAVE 17

A Elevernes egne forklaringer. Det er det samme, da $11 \cdot a = (10 + 1) \cdot a = 10a + a$.

B Elevernes egne forklaringer. Forklaringen kan, når summen af de to cifre er mindre end 10, fx søges i den "klassiske" multiplikationsopstilling:



Metoden virker ifølge opgaven "i nogle tilfælde" – nemlig som nævnt i de tilfælde, hvor summen af de to cifre a og b er mindre end 10.

C Undersøgelse. Hvis summen af de to cifre a og b er 10 eller derover, vil 10'erne i resultatet blive 1'erne i summen $a + b$, og første ciffer i resultatet vil blive a+1 – medmindre $a = 9$, hvor resultatet bliver firecifret, og de to første cifre er 10.

Eksempler:
$a = 4$, $b = 7$:47 • 11 = 517
$a = 9$, $b = 5$:95 • 11 = 1045.

OPGAVE 18

A Uanset hvilke 2 cifre, der vælges, bliver resultatet af den beskrevne procedure 11. Kalder vi de to cifre a og b, er de tocifrede tal $10a + b$ og $10b + a$.
Summen bliver da $11a + 11b = 11(a + b)$, så ved division med $a + b$ fås 11.

B Her fås tallet 222, hvilket kan indses ved opskrivninger analogt til punkt A.
De trecifrede tal skrives som 100a + 10b + c osv.

C Ved valg af fire (forskellige) cifre kan der dannes 4! = 24 forskellige fircifrede tal, så man skal nok holde sig til at gætte på resultatet, som der står i opgaven. Det oplagte gæt vil være 4444 – hvilket også er det rigtige gæt.

OPGAVE 19

A Man ender med de trecifrede tal, man startede med.

B 7 • 11 • 13 = 1001.

C Resultatet bliver et sekscifret tal, der er et "gentaget" trecifret tal, som beskrevet i punkt A.

D Det "forbløffende" ved proceduren er, at man ved at dividere med flere tal (hvor man oven i købet kan forudsige, at divisionerne går op) kan ende med starttallet. Det skyldes, at man på forhånd ved, at multiplikation af et trecifret tal med 1001 vil give en ciffergentagelse og, at primtalsopløsningen af 1001 er 7 • 11 • 13. Hvis noget tilsvarende skulle udføres med et tocifret tal, skulle man gange med 101 (fx 27 • 101 = 2727). Men 101 er et primtal, så der er ikke mulighed for at foretage mere end én division (nemlig med 101 selv), der leder tilbage til det tocifrede tal – og så forekommer resultatet ikke særligt overraskende.

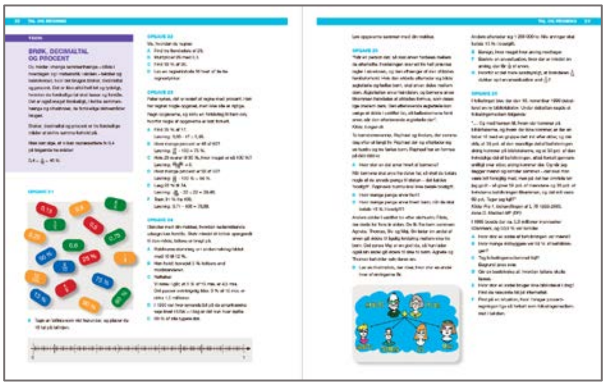
OPGAVE 20

A - E

Hvis vi følger de beskrevne trin med udgangspunkt i et tal a (og regner lidt undervejs) får vi:

1. Gang dit tal med 9 og træk 3 fra:
   $9a - 3$
2. Divider resultatet med 3 og læg 10 til:
   $\frac{9a-3}{3} + 10 = 3a - 1 + 10 = 3a + 9$
3. Gang resultatet med 2 og læg 12 til:
   $2 \cdot (3a + 9) + 12 = 6a + 18 + 12 = 6a + 30$
4. Divider resultatet med 3 og læg 10 til:
   $(6a + 30) : 3 + 10 = 2a + 10 + 10 = 2a + 20$
5. Gang med 5 og træk 100 fra:
   $5 \cdot (2a + 20) - 100 = 10a + 100 - 100 = 10a$
6. Divider med 10:
   $10a : 10 = a$

Så det "nye" tal er det samme som starttallet.



UDDYBENDE VEJLEDNING OG FACITLISTE

OPGAVE 21

A Elevtegning af tallinje, hvor tallene placeres.

OPGAVE 22

A $\frac{3}{10} \cdot 26 = 7{,}8$

B $26 \cdot 0{,}3 = 7{,}8$

C $\frac{26 \cdot 30}{100} = 7{,}8$

D Elevernes regnehistorier til A, B og C.

Elevens svar skal vise, hvordan eleven regner. Herover er forslag, men det er naturligvis ikke sikkert, at eleverne regner sådan. Pointen er, at de tre første spørgsmål egentlig er "samme spørgsmål"

OPGAVE 23

A Rigtig.

B Rigtig.

C Forkert. Det rigtige svar er $66\frac{2}{3}$.

D Rigtig.

E Forkert. Det rigtige svar er 41,48.

F Forkert. Det rigtige svar er 74,52.

Eleven skal regne opgaverne og give forklaring på, hvorfor de forkert regnede opgaver ikke er korrekt besvaret. Disse forklaringer kan naturligvis kun bedømmes individuelt.

OPGAVE 24

Makkerdiskussion. Bemærkninger til de enkelte punkter:

A - B Hvis man med rimelighed skal kunne angive en stigning eller et fald med en procentsats kræver det to tal: Værdien før og værdien efter. Hverken "publikumsstemning" eller "hovedkulde" kan måles med tal, så ret beset er de to udsagn dybt forvrøvlede. Ikke desto mindre er det ikke ualmindeligt at bruge procentbetegnelser i stil med de to udsagn, og det må man bare tage ad notam. Udsagnene betyder blot, at "stemningen faldt i anden halvleg" og "han holdt hovedet mere koldt end modstanderen" (hvad det så end vil sige i den pågældende situation).

C 3 % af 15 milliarder er 450 millioner.

D "Hver syvende bil" er færre end "hver sjette bil" – hvis det tages af lige mange biler. Reelt er der altså tale om en stigning i antallet af amerikanske biler. Derfor må brugen at ordet "kun" – som antyder, at der er tale om et fald – siges at være forkert.

E Mon ikke alle rygere (100 %) dør – før eller senere?

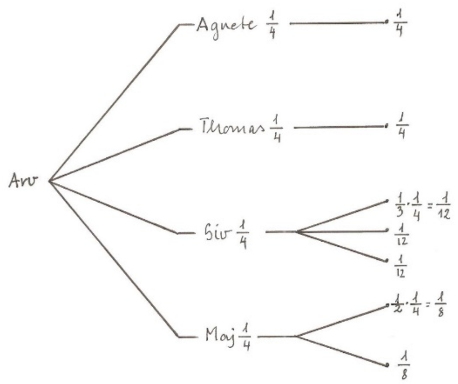
OPGAVE 25

A Hvert af Raphaels børn arver $\frac{1}{6}$ af Raphaels formue.

B Raphaels hustru arver 300.000 kr.

C Hvert barn arver 100.000 • 0,85 = 85.000 kr.

D En illustration kan naturligvis fremstilles på mange forskellige måder. Her er et forslag:



E Når der skal betales 15 % i boafgift, er der i alt 1.020.000 kr. til deling. De fordeles således:
Agnete og Thomas får hver 255.000 kr.
Hvert af Sivs børn får 85.000 kr.
Hvert af Majs børn får 127.500 kr.

F Elevernes egne beskrivelser.

G Da $12 = 2^2 \cdot 3$ kan $\frac{1}{12}$ opstå på flere forskellige måder ($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$ eller $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$). Da 17 er et primtal kan brøken $\frac{1}{17}$ kun optræde, hvis der er 17 børn – og det er usandsynligt.

OPGAVE 26

A 49,4 %. Det vil sige, at der er 5,3 • 0,494 = 2 620 000 mænd. Det betyder, at der er 5,3 • 2,62 = 2 680 000 mio. kvinder i Danmark (det har betydning for spørgsmål D).

B 3 657 000.

C Tager folketingsmedlemmet fejl? Det kan man roligt sige! Lad os se på konsekvensen af Dansk Folkepartis procentregningsmetode: Hvis 39 % af den mandlige del af befolkningen aldrig kommer på bibliotekerne, betyder det, at 100 • 39 = 61 % af den mandlige del af befolkningen kommer på bibliotekerne. Hvis 30 % af den kvindelige del af befolkningen aldrig kommer på bibliotekerne, betyder det, at 100 • 30 = 70 % af den kvindelige del af befolkningen kommer på bibliotekerne. I overensstemmelse med Dansk Folkepartis regnemetode betyder det (selv om man skal være forsigtig med at lægge mænd og kvinder sammen), at 61 + 70 = 131 % af befolkningen bruger bibliotekerne.

D Tallene i sig selv er vel tydelige nok. Det kræver nærmest "ond vilje" at misforstå dem. Skulle man gøre det tydeligere, at man ikke kan regne som Aase D. Madsen gør, kunne man fx ræsonnere således (jvf. resultaterne fra A):

39 % af 2 620 000 = 1 020 000 mænd bruger ikke bibliotekerne.

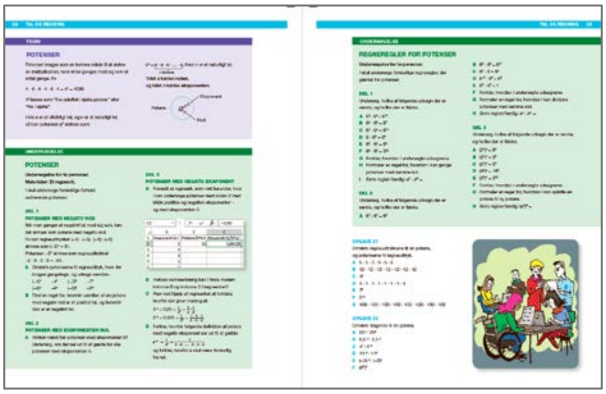
30 % af 2 680 000 = 804 000 kvinder bruger ikke bibliotekerne.

I alt giver det 1 824 000 danskere, der ikke bruger bibliotekerne.

Det svarer til ca. $\frac{1,824}{5,3}$ = 34,4 % af befolkningen.

E Elevernes egne undersøgelser.

F Elevernes egne svar.



UDDYBENDE VEJLEDNING OG FACITLISTE

UNDERSØGELSE: POTENSER

DEL 1

A $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

$-4^3 = -4 \cdot 4 \cdot 4 = -64$

$(-7)^5 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = -16.807$

$-7^5 = -7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = -16.807$

$(-9)^4 = (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) = 6561$

$-9^4 = -9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = -6561$

$(-2)^8 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 256$

$-2^8 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -256$

B En potens med negativ rod er positiv, hvis eksponenten er et lige tal.

DEL 2

A For ethvert tal $a \neq 0$ gælder $a^0 = 1$.
Bemærk, at potensen a^0 (på linje med potenser med negativ eksponent) *ikke* er defineret for $a = 0$. Det er også "indbygget" i de fleste elektroniske regnemidler (fx Excel), der giver en fejlmeddelelse, hvis man forsøger at udregne 0^0. Visse billige regnemidler (fx "regnemaskiner" i nogle mobiltelefoner) giver dog blot værdien 1.

DEL 3

A Eleverne fremstiller egne regneark.
B Tallene i kolonne B og C er hinandens reciprokke.
C Elevernes egne forklaringer.
D Elevernes egne forklaringer.

UNDERSØGELSE: REGNEREGLER FOR POTENSER

DEL 1

A Falsk.
B Sandt.
C Falsk.
D Sandt.
E Sandt.
F Falsk.
G Elevernes egne forklaringer.
H Man ganger potenser med samme rod ved at beholde roden og addere eksponenterne.
I $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

DEL 2

A Sandt.
B Falsk.
C Falsk.
D Sandt.
E Sandt.
F Elevernes egne forklaringer.
G Man dividerer potenser med samme rod ved at beholde roden og trække nævnerens eksponent fra tællerens.
H $a^n : a^m = a^{n-m}$

DEL 3

A Falsk.
B Falsk.
C Sandt.
D Falsk.
E Sandt.
F Elevernes egne forklaringer.
G Man opløfter en potens til ny potens ved at beholde roden og multiplicere eksponenterne.
H $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

OPGAVE 27

A 5^6
B 12^7
C $4 \cdot 4 \cdot 4$
D 1^8
E $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$
F $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
G 100^8 (eller 10^{16})

OPGAVE 28

A 25^{-2}

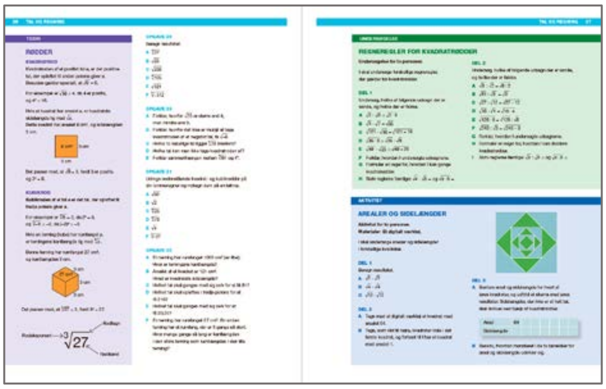
B $0,5^{-6}$

C 4^{10}

D 11^{0}

E $(-2)^{-6}$

F 8^{15}



UDDYBENDE VEJLEDNING OG FACITLISTE

OPGAVE 29

A $\sqrt[3]{27} = 3$
B $\sqrt{25} = 5$
C $\sqrt{256} = 16$
D $\sqrt[3]{125} = 5$
E $\sqrt{121} = 11$
F $\sqrt[3]{-512} = -8$

OPGAVE 30

A Elevernes egen forklaring. ($4 < \sqrt{20} < 5$ fordi $4^2 = 16 < 20 < 25 = 5^2$).
B Elevernes egen forklaring.
C $2 < \sqrt[3]{20} < 3$
D Man kan ikke tage kvadratroden af de negative tal.
E $\sqrt[3]{64} = 4$ fordi $4^3 = 64$.

OPGAVE 31

A 7,07
B 1,41
C 2,92
D 4,27
E 1,77
F -3

Resultaterne er her angivet som et helt tal eller decimaltal med 2 decimaler. Resultaterne skal indtegnes på en tallinje.

OPGAVE 32

A Terningens kantlængde er 10 cm.
B Kvadratets sidelængde er 11 cm.
C Tallene -9 og 9 har begge kvadratet 81.
D Tallet $\sqrt[3]{216} = 6$, idet $6^3 = 216$.
E Tallet $\sqrt{20{,}25} = 4{,}5$ idet $4{,}5^2 = 20{,}25$.
F Når rumfanget af den lille terning er 27 cm^3, er kantlængden $\sqrt[3]{27} = 3$ cm.
Når rumfanget af den store terning er $8 \cdot 27 = 216$ cm^3, er kantlængden lig med $\sqrt[3]{216} = 6$ cm.
Kantlængden i den store er altså dobbelt så lang som kantlængden i den lille, når rumfanget af den store er $2^3 = 8$ gange så stort som rumfanget af den lille.
Generelt gælder, at hvis længdeforholdet mellem to figurer er $1 : k$, vil arealforholdet være $1 : k^2$, og rumfangsforholdet vil være $1 : k^3$.

UNDERSØGELSE: REGNEREGLER FOR KVADRATRØDDER

DEL 1

A Sandt.

B Sandt.

C Falsk.

D Sandt.

E Falsk.

F Elevernes egne forklaringer.

G Man ganger kvadratrødder ved at gange radikanderne og beholde rodtegnet (formel nr. 1 i punkt H). Læser man dette "fra højre mod venstre" (formel nr. 2 i punkt H) står det, at man kan uddrage kvadratroden af et produkt ved at uddrage den af hver faktor for sig.

H $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

DEL 2

A Sandt.

B Sandt.

C Falsk.

D Sandt.

E Sandt.

F Falsk.

G Elevernes egne forklaringer.

H Man dividerer kvadratrødder ved at dividere radikanderne og beholde rodtegnet (formel nr. 1 i punkt I). Læser man dette "fra højre mod venstre" (formel nr. 2 i punkt I) står det, at man kan uddrage kvadratroden af en brøk ved at uddrage den af tæller og nævner hver for sig.

I $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$

$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$ eller $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

AKTIVITET: AREALER OG SIDELÆNGDER

DEL 1

A 2

B 4

C 12

DEL 2

A Elevernes egne tegninger.
Kvadratet har sidelængden 8.

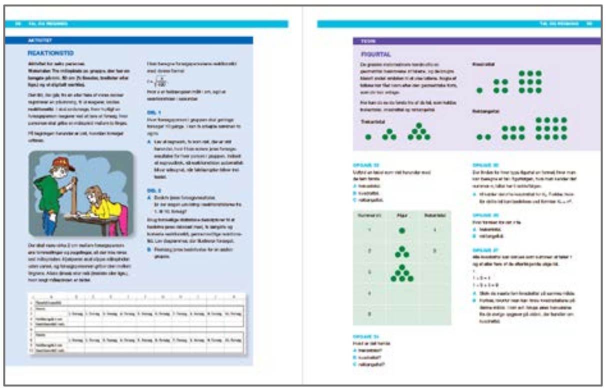
B Elevernes egne tegninger.
Kvadraternes hjørner går fra de ydre kvadraters sidelængders midtpunkter.

DEL 3

A Når det første (og største) kvadrat har arealet 64 og dermed sidelængden 8, vil målene for kvadratfølgens elementer være

Kvadrat-nummer	Sidelængde	Areal
1	8	64
2	$4\sqrt{2} \approx 5{,}66$	32
3	4	16
4	$2\sqrt{2} \approx 2{,}83$	8
5	2	4
6	$\sqrt{2}$	2
7	1	1

B Elevernes egne beskrivelser. Arealet halveres for hvert trin. Sidelængden divideres tilsvarende med $\sqrt{2}$ (hvilket er det samme som at gange med $\frac{\sqrt{2}}{2}$).



UDDYBENDE VEJLEDNING OG FACITLISTE

AKTIVITET: REAKTIONSTID

DEL 1

A Eleverne fremstiller i makkerpar et regneark, udfører forsøget 10 gange hver og noterer resultaterne i regnearket.

DEL 2

A Elevernes egne beskrivelser af forsøgsresultaterne.

B Intet facit.

OPGAVE 33

A - C Herunder er en samlet tabel over trekants-, kvadrat- og rektangeltal. Tegninger er her udeladt, men antydet ved rektangeltallene.

	Trekanttal	Kvadrattal	Rektangeltal
1	1	1	2 (1x2)
2	3	4	6 (2x3)
3	6	9	12 (3x4)
4	10	16	20 (4x5)
5	15	25	30 (5x6)

OPGAVE 34

A Det tiende trekantstal er 55.

B Det tiende kvadrattal er 100.

C Det tiende rektangeltal er 110.

OPGAVE 35

A Elevernes egne forklaringer.

OPGAVE 36

A Det n'te trekanttal er tallet $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Det vil være fint, hvis eleverne finder sumudtrykket på venstre side.

B Det n'te rektangeltal er tallet $n \cdot (n + 1)$.

OPGAVE 37

A De første fem kvadrattal skrevet på den angivne måde er:

1

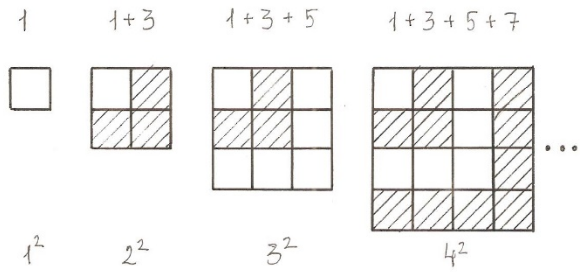
4 = 1 + 3

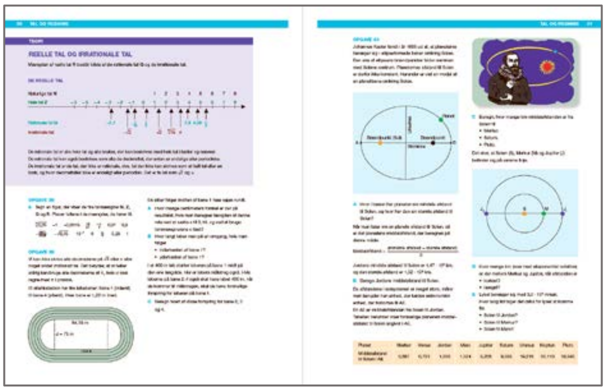
9 = 1 + 3 + 5

16 = 1 + 3 + 5 + 7

25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9

B Elevernes egne forklaringer. Af figuren herunder kan man se, hvordan et kvadrattal kan komme som sum af de første på hinanden følgende ulige tal, og hvordan det næste kvadrattal kommer af det foregående kvadrattal ved addition af det næste ulige tal i rækken.

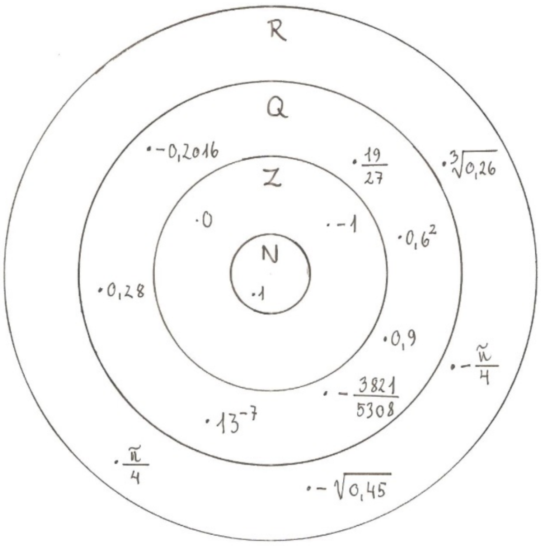




UDDYBENDE VEJLEDNING OG FACITLISTE

OPGAVE 38

A Elevernes egne tegninger. Herunder er et forslag til, hvordan tegningen kan se ud, og hvor tallene skal placeres:



OPGAVE 39

A Forskellen kommer udelukkende fra den cirkulære del af banen. Tilsammen udgør de to baneender en cirkel, og følger man midten af bane 1, er diameteren lig med 73 + 1,22 = 74,22 m.
Omkredsen beregnes da (med fire decimaler) til:
π-værdi = 3,14:
O = 3,14 • 74,22 = 233,0508 m.
Lommeregnerens π-værdi:
O = π • 74,22 = 233,1690 m.
Det vil sige, at forskellen på de to mål er 0,1182 m = 11,82 cm.

I resten af denne opgave (og generelt i facitlisten) bruges lommeregnerens π-værdi.

B En omgang langs indersiden (fire decimaler): π·73 + 2·84,39 = 398,1163 m.
En omgang langs ydersiden (fire decimaler): π·(73 + 2·1,22) + 2·84,39 = 405,7817 m.

C Vi regner med, at alle løbere følger midterlinjen i deres bane (men det er i øvrigt ligegyldigt, blot de alle følger *samme* rute i deres bane). Den afstand, de derved kommer til at løbe længere, svarer til omkredsen af en cirkel med diameter*forøgelsen* som diameter. Da diameterforøgelsen, når man går fra bane 1 til bane 2 osv. hver gang er 1,22 m, giver det en baneforøgelse på π • 1,22 m. Udregnet med 2 decimaler giver dette disse forspring i forhold bane 1:
Bane 2: π • 1,22 = 3,83 m.
Bane 3: 2 • π • 1,22 = 7,67 m.
Bane 4: 3 • π • 1,22 = 11,50 m.

OPGAVE 40

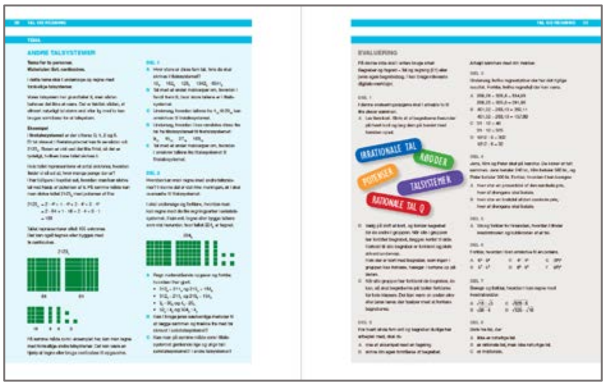
A Planeten har mindste afstand til solen i punkt A.
Planeten har største afstand til solen i punkt B.

B Jordens middelafstand til Solen er 1,495 • 10^8 km.

C Middelafstanden fra Solen (skrevet med eksponentiel notation) til:
Merkur er 0,387 • 1,495 • 10^8 = 5,786 • 10^7 km.
Saturn er 9,555 • 1,495 • 10^8 = 1,428 • 10^9 km.
Pluto er 39,545 • 1,495 • 10^8 = 5,912 • 10^9 km.

D Når afstanden mellem Merkur og Jupiter er kortest, er den 5,203 – 0,387 = 4,816 AE = 7,20 • 10^8 km.
længst, er den 5,203 + 0,387 = 5,59 AE = 8,36 • 10^8 km

E Den tid, det tager lyset at komme fra Solen til
Jorden, er ca. 8,3 minutter.
Merkur, er ca. 3,2 minutter.
Mars, er ca. 12,6 minutter.



UDDYBENDE VEJLEDNING OG FACITLISTE

TEMA: ANDRE TALSYSTEMER

DEL 1

Tal i vores normale 10-talssystem skrives her uden 10 som indeks.

A $13_4 = 7$,
$102_3 = 11$,
$123_4 = 27$,
$1342_5 = 222$,
$4341_5 = 596$

B Elevernes egne samtaler om fremgangsmåder.

C Elevernes egne undersøgelser. Herunder er tallene fra 1 til 20 noteret i tretalssystemet:

Base 10	1	2	3	4	5
Base 3	1	2	10	11	12

Base 10	6	7	8	9	10
Base 3	20	21	22	100	101

Base 10	11	12	13	14	15
Base 3	102	110	111	112	120

Base 10	16	17	18	19	20
Base 3	121	122	200	201	202

D Undersøgelse af mulighederne for omskrivninger til firetalssystemet. Resultaterne er:
$9 = 21_4$
$15 = 33_4$
$27 = 123_4$
$103 = 1213_4$

E Elevernes samtaler om fremgangsmåderne i punkt D.

DEL 2

A Eleverne skal forsøge at regne i sekstalssystemet uden at "oversætte" til titalssystemet. Det er de ikke umiddelbart i stand til, men ved hjælp af et "base-6-materiale" som det antydede, kan de formentlig klare additioner og subtraktioner – men næppe multiplikationer og divisioner.
En af pointerne ved en opgave af denne art er, at det gøres klart for eleverne, at grundlaget for al "håndregning" (og hovedregning) i et talsystem er kendskab til "de små tabeller" – og dem kender eleverne af gode grunde ikke i base seks.
Herunder vises den lille additionstabel og den lille multiplikationstabel i base seks. En kopi kan evt. udleveres til hjælp for eleverne.

Den lille additionstabel i base seks

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	10
2	2	3	4	5	10	11
3	3	4	5	10	11	12
4	4	5	10	11	12	13
5	5	10	11	12	13	14

Den lille multiplikationstabel i base seks

$\bullet_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

Her er resultaterne af de anførte regnestykker:
$312_6 + 211_6 = 523_6$ og $213_6 + 134_6 = 351_6$
$312_6 – 211_6 = 101_6$ og $213_6 – 134_6 = 35_6$
$3_6 \bullet 35_6 = 153_6$ og $4_6 \bullet 25_6 = 152_6$
$52_6 : 4_6 = 12_6$ og $304_6 : 4_6 = 44_6$

B Alle de regnealgoritmer, eleverne kender fra titalssystemet, kan også bruges i ethvert andet talsystem.

C I sekstalssystemet (og i ethvert andet talsystem med *lige* base) vil ethvert tal minus 1'erne være lige (en sum af lige tal). Selve tallet er derfor – som i titalssystemet – lige, hvis sidste ciffer er lige.

I talsystemer med *ulige* base kan lige tal ikke genkendes på denne måde. Her gælder, at hvis antallet af ulige cifre er *ulige*, så er tallet også ulige. Hvis antallet af ulige cifre er *lige*, så er tallet selv lige.

EVALUERING

DEL 1

A - C Elevaktivitet. Eleverne forklarer betydningen af de begreber, de har lært om.

DEL 2

A - B Elevaktivitet. Eleverne viser eksempler og skriver deres egen forståelse af de begreber, de har lært om.

DEL 3

A Udregning 1: Forkert.
Udregning 2: Forkert.

B Udregning 1: Forkert.
Udregning 2: Rigtig.

C Udregning 1: Forkert.
Udredning 2: Forkert.

D Udregning 1: Rigtig.
Udregning 2: Forkert.

DEL 4

Elevernes egne forklaringer af beregningsmetode. Resultaterne af beregningerne er:

A Jens betaler $26\frac{2}{3}$ %.
Kim betaler 40 %.
Peter betaler $33\frac{1}{3}$ %.

B De "oplagte" brøker (der udgør den rigtige besvarelse) og de tilsvarende uforkortelige brøker er:

Jens: $\frac{240}{900} = \frac{4}{15}$.

Kim: $\frac{360}{900} = \frac{2}{5}$.

Peter: $\frac{300}{900} = \frac{1}{3}$.

DEL 5

A Elevernes egne forklaringer.

DEL 6

Elevernes egne forklaringer. Resultaterne er:

A 6^{11}

B 5^{12}

C 4^{10}

D 8^{14}

E 3^{15}

F 9^{24}

DEL 7

Elevernes egne forklaringer. Resultaterne er:

A $\sqrt{15} : \sqrt{3} = \sqrt{15 : 3} = \sqrt{5}$

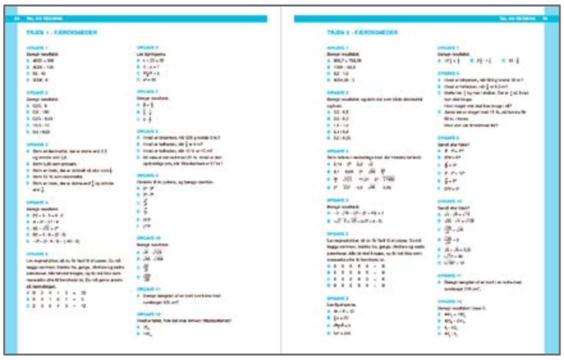
B $\sqrt{36 \cdot 4} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{4} = 6 \cdot 2 = 12$.
Men $\sqrt{36 \cdot 4} = \sqrt{144} = 12$ er også rigtigt.

C $\sqrt{625 : 5} = \sqrt{125}$ (= $5\sqrt{5}$)

D $\sqrt{125} \cdot \sqrt{16} = 4\sqrt{125}$ (= $20\sqrt{5}$)

DEL 8

A - C Elevernes egne svar. Her er uendeligt mange løsninger.



UDDYBENDE VEJLEDNING OG FACITLISTE

TRÆN 1 · FÆRDIGHEDER

OPGAVE 1

A 5151
B 3904
C 840
D 501

OPGAVE 2

A 2
B 50
C 0,125
D 1,65
E -16

OPGAVE 3

A For eksempel 2,55 – men der er uendeligt mange andre muligheder.
B 88 %.
C $\frac{4}{5}$
D 0,52
E $\frac{1}{3}$ – men der er uendeligt mange andre muligheder.

OPGAVE 4

A 16
B 26
C 41
D 16
E 2
F

OPGAVE 5

Der er mange muligheder. Her er tre forslag:

A 4 • 6 + 1 + 3 + 5 = 33.
B (7 – 5 – 1) • 9 : 3 = 3.
C (2 + 4 + 6) • 3 : 3 = 12.

OPGAVE 6

A $x = 15$
B $x = -3$
C $x = 8$
D $x = -9$ eller $x = 9$

OPGAVE 7

A $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$
B $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
C 6

OPGAVE 8

A Kiloprisen er 45 kr.
B Helheden er 6 m.
C Helheden er 150 m.
D Den oprindelige pris er 76 kr.

OPGAVE 9

Værdien af tallene i punkt B, E og F kan ikke udregnes eksakt med en normal lommeregner, men må angives med eksponentiel notation. Her er samtlige cifre dog angivet til sidst.

A 3^{13} = 1.594.323
B 7^{14} = 6,78 • 10^{11} (= 678.223.072.849)
C 4^{4} = 256
D 7^{6} =117.649
E 5^{24} = 5,96 • 10^{16} (= 59.604.644.775.390.625)
F 7^{15} = 4,75 • 10^{12} (= 4.747.561.509.943)

OPGAVE 10

A 33
B 78
C 3
D 2

OPGAVE 11

A Kantlængden er 5 cm.

TRÆN 2 · FÆRDIGHEDER

OPGAVE 1

A 1715,76
B 949,1
C 12,3
D 2668,02

OPGAVE 2

A 0,1 $\frac{1}{10}$
B 0,06 $\frac{6}{100} = \frac{3}{50}$
C 2,1 $\frac{21}{10}$
D 8
E 2

OPGAVE 3

A $\sqrt{2}$ 2,15 2,2 2^2
B 8,08 8,1 3^2 $\sqrt{90}$ $\frac{29}{3}$
C 2^3 $\sqrt[3]{100}$ $\sqrt{121}$ 11,01 $\frac{34}{3}$
D $\sqrt[3]{27}$ 4,89 4,9 $\sqrt{49}$ 2^3

OPGAVE 4

A 0
B 27

OPGAVE 5

Der er mange muligheder. Herunder er nogle forslag. Bemærk, at nogle af parenteserne er overflødige, men tjener til at give overblik over tankegangen.

A (8 : 8) · (8 : 8) · 8 = 8
B (8 : 8) · 8 + 8 : 8 = 9
C (9 : 9) · 9 – (9 : 9) = 8
D (9 : 9) · (9 : 9) · 9 = 9

OPGAVE 6

A $x = 6$
B $x = 30$
C $x = -4$
D $x = -7$ eller $x = 7$

OPGAVE 7

A $\frac{79}{6} = 13\frac{1}{6}$
B $\frac{40}{12} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$
C 12

OPGAVE 8

A Kiloprisen er 37,50 kr.
B Helheden er 0,8 m.
C Mette skal i alt bruge 2 kg mel.
D Janes timeløn var 60 kr.

OPGAVE 9

A Falsk.
B Sandt.
C Falsk.
D Falsk.
E Sandt.
F Falsk.

OPGAVE 10

A Falsk.
B Sandt.
C Sandt.
D Sandt.
E Sandt.
F Falsk.
G Sandt.

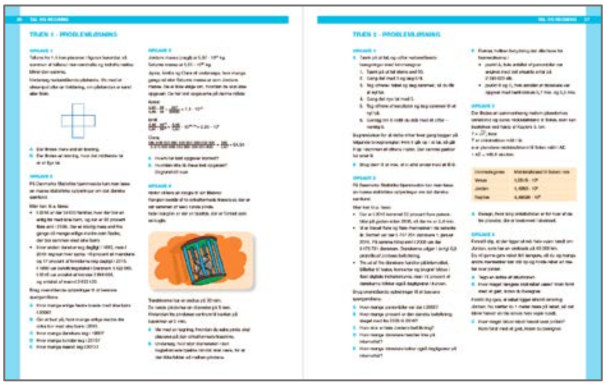
OPGAVE 11

A Kantlængden er 6 cm.

OPGAVE 12

Til denne opgave vil det være en fordel, hvis man lader eleverne udarbejde de små tabeller i base 5.

A $441_5 + 132_5 = 1123_5$
B $423_5 - 241_5 = 132_5$
C $3_5 \cdot 42_5 = 231_5$
D $44_5 : 3_5 = 13_5$



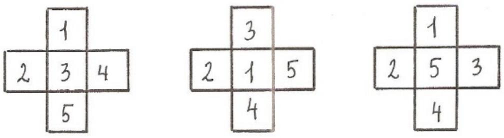
UDDYBENDE VEJLEDNING OG FACITLISTE

TRÆN 1 · PROBLEMLØSNING

OPGAVE 1

Eleverne undersøger og argumenterer for eller mod påstandene:

A Der findes mere end én løsning, og den nemmeste måde at vise det på er selvfølgelig at angive to forskellige løsninger, fx to af disse:



Hvis to løsninger anses for at være forskellige, når de adskiller sig fra hinanden i mindst én ”celle” i korset, findes der i alt 24 forskellige løsninger (8 med 1 i midten, 8 med 3 i midten og 8 med 5 i midten).

B Nej, der findes ingen løsning, hvor det midterste tal er lige. Man kan indse det, ved at skrive de mulige udfyldninger op med 2 eller 4 i midten, men man kan også indse det ved følgende ræsonnement:
Hvis der skulle findes en løsning med et lige tal (2 eller 4) i midten, skal summen af 2 gange midtertallet plus resten af tallene være lige – ellers kan den ikke deles i to lige store summer. Men der gælder:
1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 = 17 (ulige) og 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 = 19 (ulige).
Derimod findes der som vist løsninger med ethvert af de tre ulige tal i midten.

OPGAVE 2

A I 2006 boede ca. 25.000 fædre alene med deres børn (en ”nøjagtig” beregning ud fra oplysningerne giver 24.638, men det giver ingen mening at opfatte dette tal som eksakt).

B Da der er mere end fire gange så mange enlige mødre som fædre, er der mindst 4 • 34.000 = 136.000 enlige mødre, der bor sammen med deres børn.

C Der var ca. 2.500.000 danskere, der røg i 1980 (2.561.033).

D I 2015 røg ca. 500.000 kvinder (17 % af 2.866.098 ≈ 487.237).

E I 2015 røg ca. 450.000 mænd (16 % af 2.833.122 ≈ 453.300).

OPGAVE 3

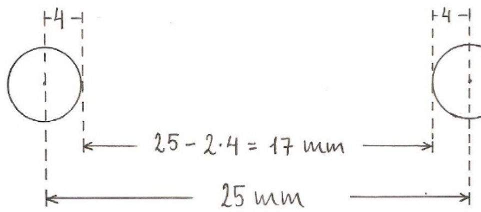
A Både Emil og Clara har løst opgaven rigtigt. Forskellen er, at Emil har valgt at angive løsningen med to betydende cifre, mens Clara har valgt at angive løsningen med 4 betydende cifre. Ingen af delene kan siges at være forkert i den foreliggende situation.

B Elevernes egne begrundelser.

OPGAVE 4

A Tegning der viser pindenes placering på træskiven. Centrene for de seks runde pinde er vinkelspidser i en regulær sekskant med sidelængden 30 • 5 = 25 mm.

B Ifølge punkt A er afstanden mellem *centrene* for to nabopinde lig med 25 mm. Derved bliver afstanden mellem to nabopinde *fra kant til kant* lig med 17 mm., som det ses af figuren herunder.



Kuglen skal altså have en diameter, der er større end 17 mm.

TRÆN 2 · PROBLEMLØSNING

OPGAVE 1

A Eleven gennemgår den beskrevne procedure med et tal større end 50.
B Elevernes egne argumenter for, at resultatet altid bliver 9.

En argumentation kunne fx bestå af nogle af disse punkter:
I punkt 2 sikrer vi os, at resultatet er deleligt med 3.
I punkt 3 finder vi tværsummen af resultatet fra punkt 2 – og dette tal er så også deleligt med 3.
I punkt 4 ganger vi igen med 3 – og sikrer derved, at resultatet er deleligt med 9.
I punkt 5 og 6 finder vi totaltværsummen af tallet fra punkt 4, og da dette tal er deleligt med 9, vil totaltværsummen altid blive 9.

Proceduren giver tallet 9 uanset hvilket tal, man starter med. Kravet om, at tallet skal være større end 50, sikrer blot lidt regning undervejs. Tilsvarende er det egentlig heller ikke nødvendigt at lægge 6 til i punkt 2. Man kunne lægge ethvert tal til, som 3 går op i (derfor også nul).

OPGAVE 2

A Cirka 1 970 000 personbiler.
B Cirka 4,2 %.

I punkt C - E er der ikke nævnt årstal. Svarene her gælder for året 2016.

C Jordens befolkning var cirka 7,1 milliarder i 2016.
D Cirka 1,43 millioner.
E Cirka 742 000.
F De udregnede tal ville selvfølgelig være anderledes, men det er et spørgsmål (som evt. kan tages op til diskussion i klassen), i hvilken grad man kan bruge mere nøjagtige angivelser.

A: Nytter det, at man har det eksakte antal personbiler, når man ikke ved om tallet "22 procent" også er nøjagtigt. Det angives kun med to betydende cifre, så procenten har vel ligget mellem 21,5 og 22,4? Og hvor nøjagtigt skal procentopgivelsen være, hvis det skal have mening at regne med det eksakte antal biler?

B, C: Igen ville de beregnede tal selvfølgelig ændres, men man kan spørge til rimeligheden af at lægge for stærk vægt på nøjagtigheden af en oplysning som "den 1. januar 2016 var der 5.707.251 danskere". Mennesker fødes – og dør – også den 1. januar.

G Antallet af danskere den 1. januar 2016 kl. 9 om morgenen var derfor med næsten "statsgaranti" et andet end antallet af danskere den 1. januar 2016 kl. 4 om eftermiddagen.

OPGAVE 3

A Venus: 0,615 år (cirka 7 måneder og 11 dage).
Jorden: 1 år.
Neptun: 30,06 år.

OPGAVE 4

A Elevernes egne skitser.
B Rebet skal være 2π m længere (2π m $\approx$ 6,28 m).
C Rebet bliver hævet $\frac{1}{2\pi}$ m ($\approx$ 15,9 cm).

Resultaterne i B og C virker overraskende for de fleste. Ligeledes er det overraskende, at resultaterne ville være de samme, hvis man i stedet for Jorden startede med fx en tennisbold. Det hænger sammen med, at der er en lineær sammenhæng mellem en cirkels omkreds O og dens diameter d ($O = \pi \cdot d$). Den samme forøgelse af diameter (eller radius) vil derfor give samme forøgelse af omkredsen, uanset hvad udgangspunktet er.