OM KAPITLET

Matematisk modellering er en arbejdsproces, hvor man anvender matematik til at belyse og behandle situationer og problemstillinger fra omverdenen.

I kapitlets første del er der fokus på, hvad en matematisk model og matematisk modellering er. Eleverne skal arbejde med de forskellige dele af modelleringsprocessen. De skal desuden analysere og vurdere matematiske modeller, der beskriver forskellige forhold fra omverdenen.

I den sidste del af kapitlet skal eleverne selv gennemføre en matematisk modelleringsproces ud fra forskellige situationer og problemstillinger.

Eleverne skal i arbejdet med kapitlet inddrage digitale værktøjer, hvor de finder det relevant at anvende dem.

ELEVMÅL FOR KAPITLET

Målet er, at eleverne:

- kan gennemføre en matematisk modelleringsproces
- kan udpege relevante informationer af en virkelig situation og oversætte dem til matematiske repræsentationer og symboler
- kan oversætte fra en matematisk model "tilbage" til en virkelig situation og beskrive det matematiske resultat i dagligdagssprog
- kan analysere og vurdere matematiske modeller og resultater.
- kan formidle matematiske argumenter og resultater med fokus på modtagerens behov for information.

HUSKELISTE

PRINTARK

- A11 Den matematiske modelleringsproces
- U6 Er der luft nok?
- U7 Hvor mange filtkugler?
- E9 Begreber og fagord - Matematisk modellering

DIGITALE VÆRKTØJER

- Regneark
- Geometriprogram
- CAS

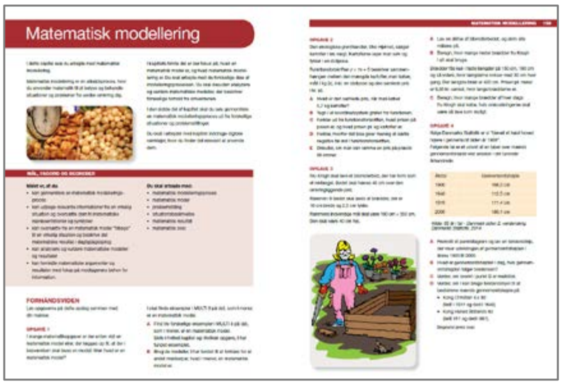
FAGLIGE BEGREBER

I kapitlet arbejdes med følgende centrale fagord og begreber:

- matematisk modelleringsproces
- matematisk model
- problemstilling
- situationsbeskrivelse
- tolkning
- kritik

FÆLLES MÅL

På MULTIs hjemmeside er der en oversigt over, hvilke Fælles Mål der er udgangspunkt for arbejdet med kapitlet.



FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

OPGAVE 1

A-B	Ingen faste facits.

OPGAVE 2

A	Den samlede pris for 5,7 kg kartofler er 44,90 kr.
B	Graf for funktionen y = 7x + 5. Grafen tegnes ikke her.
C	Elevforklaring. Kartoflerne koster 7 kr./kg. Posen koster 5 kr.
D	Elevforklaring. Man kan ikke købe et negativt antal kartofler.
E	Diskussion.

Det er naturligvis muligt at ramme en pris på 50 kr. men næppe med særlig stor sandsynlighed. Sandsynligheden for, at det kan ske, stiger, hvis man skelner mellem beregningspris og betalingspris. I spørgsmål A er beregningsprisen 44,90 kr., men hvis kartoflerne er det eneste man køber, og hvis man betaler kontant, er betalingsprisen 45,00 kr. pga. det danske møntsystem.

Hvis beregningsprisen for selve kartoflerne er større end 44,74 kr. men mindre end 45,25 kr. vil beregningsprisen for købet inkl. pose ligge mellem 49,74 kr. og 50,25 kr., og betalingsprisen vil derfor være 50 kr.

Det svarer til, at man køber mellem 6391 og 6464 g kartofler – altså et interval på 73 g.

Endelig kan man jo – hvis grønthandleren tillader det – ramme 50 kr. præcist ved at købe 10 poser og ingen kartofler. Men den mulighed må vel nærmest betegnes som snyd ☺!

OPGAVE 3

A Skitse med mål. Der her angivne mål er de udvendige mål.

B Fru Krogh skal i alt bruge 8·(3,55 + 1,90) = 43,6 m brædder.

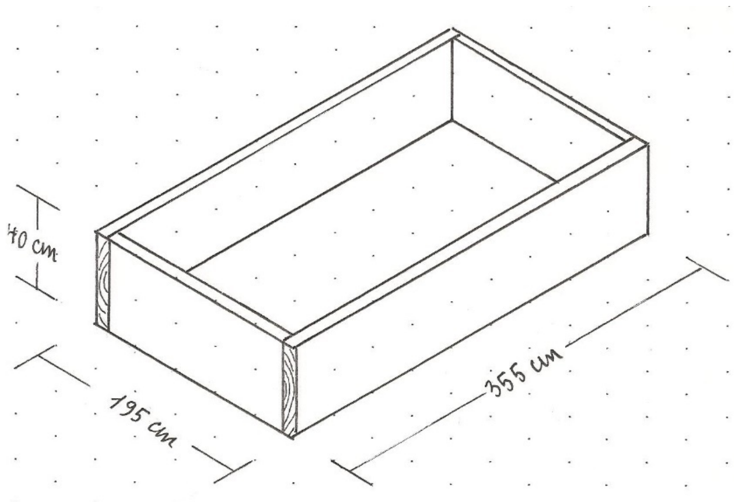
C Der skal købes:

8 brædder à 360 cm til langsiderne:
286,56 kr.

4 brædder à 390 cm til de korte sider:
155,22 kr.

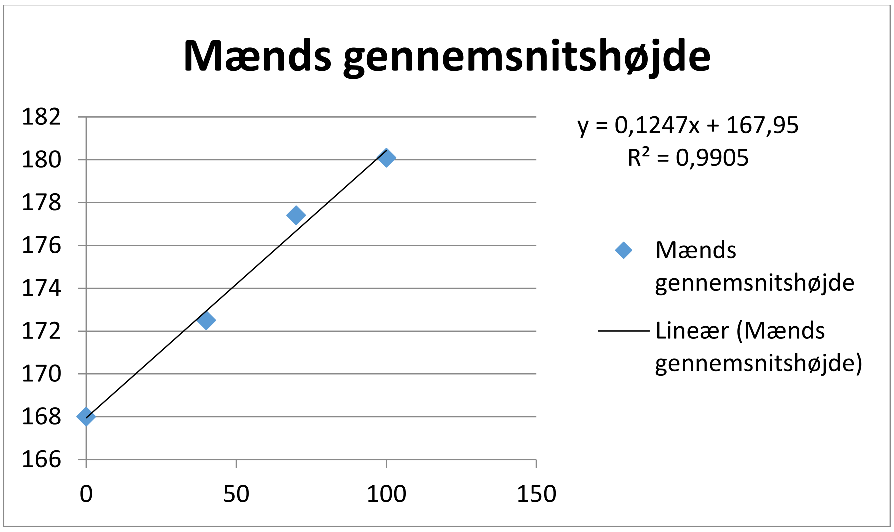
I alt 441,78 kr.

De 4 brædder à 390 cm bliver til 8 gavlbrædder à 190 cm.



OPGAVE 4

A Punktdiagram med (lineær) tendenslinje. Tallene på x-aksen er antal år efter 1900.



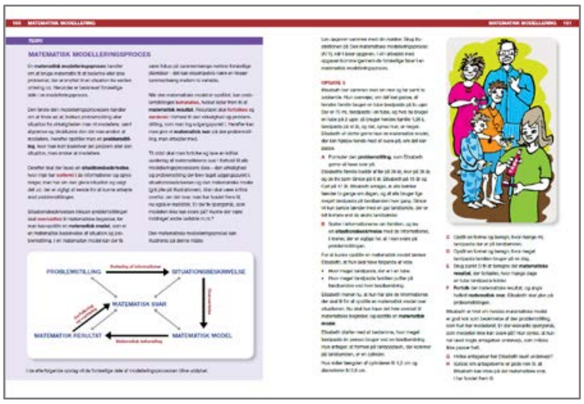
B Hvis denne tendens følges i årene 2017-2026 får man:

2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
182,5	182,7	182,8	182,9	183,0	183,2	183,3	183,4	183,5	183,7

Heraf kan man aflæse, hvad gennemsnitshøjden for mænd efter denne model vil være i disse ti år.

C Elevvurdering.

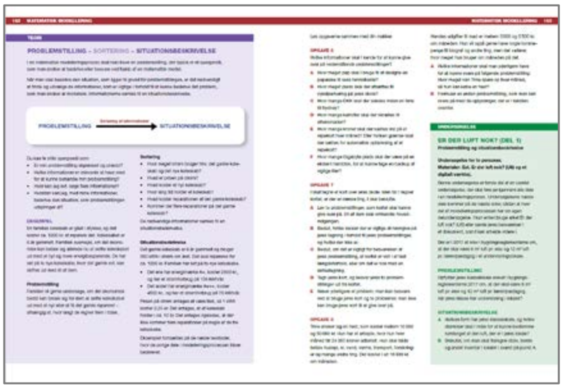
D Det er naturligvis helt håbløst at forestille sig, at en matematisk model som denne kan bruges over flere hundrede år – bagudrettet eller fremadrettet. Forsøger man sig alligevel, kommer man til det resultat, at mænd på Christian den fjerdes tid var ca. 130 cm høje, mens de på Harald Blåtands tid var omkring 50 cm høje!



FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

OPGAVE 5

A-B	Ingen faste facits.	
C	Tandpasta pr. børstning:	$\pi \cdot 0{,}4^2 \cdot 1{,}2\ \text{cm}^3 \approx 0{,}6\ \text{cm}^3 = 0{,}6\ \text{mL}$
D	Tandpasta pr dag:	$2 \cdot 5 \cdot 0{,}6 = 6\ \text{mL/dag}$
E	Tubevarighed: $\frac{75\ \text{mL}}{6\ \text{mL/dag}} = 12{,}5$ dage.	
	Så 2 uger er altså ikke helt ved siden af.	
F-H	Ingen faste facits.	



MÅL OG FAGLIGT INDHOLD

FACITLISTE OG UDDYBENDE FORKLARING

OPGAVE 6

Here er nogle bud på oplysninger, der er nødvendige i de enkelte tilfælde:

A Boldenes diameter (eller radius).

B Antal elever, der cykler i skole.
Hvor meget plads optager et enkelt cykelstativ?

C Kursen på Australske dollars (AUD). Og hvor mange AUD der skal bruges på ferien.

D Da kartofler kan have meget forskellig størrelse, vil første skridt nok være at ændre spørgsmålet fra "Hvor mange kartofler …" til "Hvor mange *gram* kartofler…". Desuden:
Hvor mange skal spise til middag?
Hvor mange er voksne, og hvor mange er børn?
Hvad spiser en voksen/et barn i gennemsnit af kartofler til et måltid?
Hvad/Hvor meget serveres der – ud over kartoflerne – pr. person til måltidet?
Endelig spiller det erfaringsmæssigt en rolle, *hvordan* kartoflerne serveres: Almindelige kogte kartofler, bagte kartofler, kartoffelmos, brasede kartofler, råstegte kartofler, rösti, pommes frites,…

E Hvor meget rejser ejeren af rejsekortet?
Hvad koster de rejser, ejeren foretager?

F Hvor meget kan "vigtige filer" komme til at fylde?

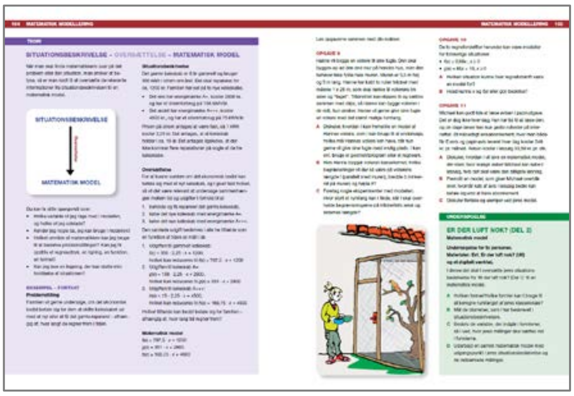
OPGAVE 7

A-E Ingen faste facits.

OPGAVE 8

A Blandt de ting, Trine bruger 16.300 kr. på hver måned, er "mange andre ting". Lommepengene går til biograf og "andre ting". Det vil næppe være muligt at lægge et budget for Trine uden at vide, hvad "andre ting" og "mange andre ting" dækker over.
I bund og grund går opgaven ud på at lægge et budget for Trine, som indeholder en post, der hedder "Opsparing til hest".
Et budget kan i denne sammenhæng betragtes som en matematisk model af en persons privatøkonomi, og det er uhyre fornuftigt at drøfte nogle principper for budgetlægning med eleverne.

B Intet fast facit.



FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

OPGAVE 9

A Elevdiskussion. Intet fast facit.

B Hvis vi går ud fra, at volieren ikke i længde eller højde må gå ud over hendes husmur, kan længden højst være 5 m, og højden højst 3,5 m.

C Det, vi søger efter her, er et resultat, der i matematikken kaldes "Maksimum under bibetingelser". Hvis vi betegner længde, højde og bredde med l, h og b, søger vi maksimum for udtrykket

$$V = l \cdot h \cdot b$$

(volierens rumfang) under bibetingelserne

$$l \leq 5$$
$$h \leq 3{,}5$$
$$2 \cdot hb + lb + lh < 50$$

Udtrykket $2 \cdot hb + lb + lh$ er det areal (3 sider og "taget"), der skal dækkes med de 50 m^2 trådnet, som Hanne har.

På systemets hjemmeside er et forslag til et regneark ("MULTI8_side165_opgave 9C"), der evt. kan anvendes.

	A	B	C
1	Hannes voliere		
2			
3	Længde i meter:	4,64	
4	Bredde i meter:	3,50	
5	Højde i meter:	2,90	
6			
7	Volierens rumfang i kubikmeter:	47,10	
8			
9	Kvadratmeter trådnet brugt:	50,00	

Der indtastes tal i de gule celler B3, B4 og B5. Den her viste løsning er ikke nødvendigvis den optimale.

I cellerne C3, C5 og C9 vises advarselstekster, hvis de indtastede tal eller trådnettets areal overskrider de grænser, der gives i opgaven, som det fx sker i eksemplet herunder.

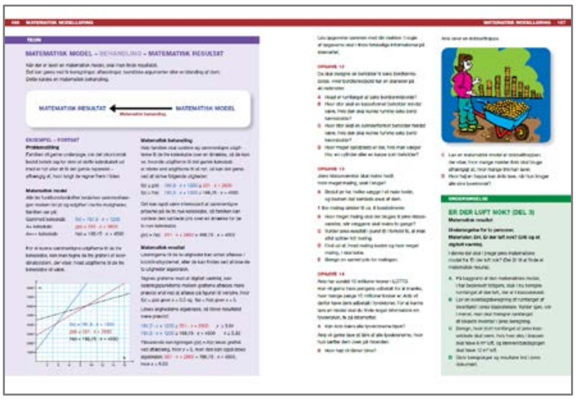
	A	B	C	D	E	F
1	Hannes voliere					
2						
3	Længde i meter:	5,50	Længden må ikke overskride 5 m.			
4	Bredde i meter:	3,50				
5	Højde i meter:	4,00	Højden må ikke overskride 3,5 m.			
6						
7	Volierens rumfang i kubikmeter:	77,00				
8						
9	Kvadratmeter trådnet brugt:	69,25	Der er brugt for meget trådnet.			
10						

OPGAVE 10

A-B Ingen faste facits.

OPGAVE 11

A-C Ingen faste facits.



FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

OPGAVE 12

A Rumfanget af seks bordtennisbolde med en diameter på 40 mm (r = 2 cm) er

$$V = 6 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = 64\pi \approx 201{,}06 \text{ cm}^3.$$

B En lille terning, der kan rumme en enkelt bordtennisbold, er 4^3 = 64 cm^3 stor. En kasse til seks bordtennisbolde skal derfor være mindst $6 \cdot 64$ = 384 cm^3 stor.

C En cylinderformet beholder til seks bordtennisbolde har en grundfladeradius på 2 cm og en højde på 24 cm. Rumfanget af den er $\pi \cdot 2^2 \cdot 24 = 96\pi \approx 301{,}59$ cm^3.

D Spildplads:

Cylinder: $96\pi - 64\pi = 32\pi \approx 100{,}53$ cm^3.
Kasse: $384 - 64\pi \approx 182{,}93$ cm^3.

OPGAVE 13

A-E Ingen faste facits.

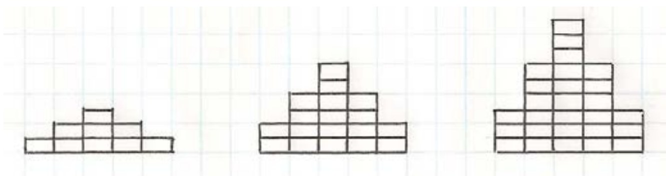
OPGAVE 14

Den kongelige mønt oplyser, at en tyvekrone har en tykkelse på 2,35 mm, en diameter på 27,0 mm og en vægt på 9,3 g.
10 millioner kr. svarer til 500.000 tyvekronestykker.

A De 500.000 tyvekroner vejer tilsammen 4.650 kg (4 ton 650 kg), så Anis kan i hvert fald ikke bære dem hjem på én gang!

B Tårnet ville blive 1.175 m højt (1 km og 175 m).

C Intet fast facit. Alt afhænger af den model, eleven vælger.
I sammenhænge, hvor matematiske modeller spiller en rolle, er problemstillingen sjældent helt afgrænset. Således også her. Der er ingen oplysninger i opgaven om, hvordan dobbelttrappen skal opbygges. I det følgende går vi ud fra (dvs. vælger), at alle trin på trappen har samme højde. Men hvor højt skal hvert trin være? En 20’er, to 20’ere, tre 20’ere, ...?

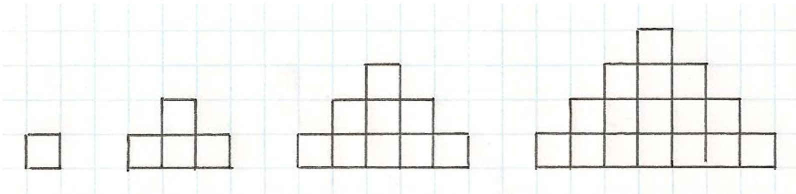


Trinhøjde 1 2 3

Eleverne må altså tage beslutning om, hvilken trappe de vil modellere.
Det må anbefales at starte med at betragte trinhøjden 1. Man kan så senere se på, om modellen kan udvides til at omfatte trinhøjder > 1.

1. Trinhøjde 1.

Start med at lade eleverne tegne de første 4-5 figurer i trappeopbygningen. Herunder er hver 20'er for tydelighedens skyld tegnet som et lille kvadrat.



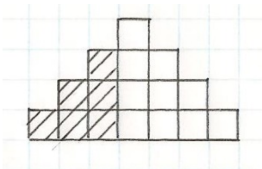
Hvor mange 20'ere går der til trappe nr. *n*?

Dette problem er en del af kapitlet "Matematiske undersøgelser", nemlig undersøgelsen "Figurfølger" side 176, men eleverne har faktisk mødt det før, nemlig i *MULTI 7*, kapitlet "Tal i mængder", undersøgelsen "Differensrækker og summer", hvor de har udviklet formlen

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Det samlede antal 20'ere er da (se figuren herunder – eksemplificeret ved $n = 4$):

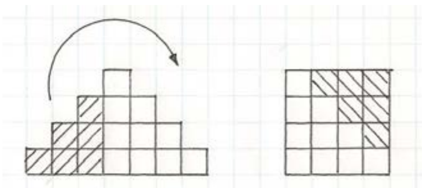
Summen af tallene fra 1 til $(n - 1)$ (de skraverede 20'ere) plus summen af tallene fra 1 til n (de ikke skraverede 20'ere).



Bruger vi formlen fra *MULTI 7* får vi:

$$\frac{(n-1) \cdot n}{2} + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

Vi kan indse det samme geometrisk, hvor antallet af 20'ere i den sidste opstilling tydeligt er n^2:



Antallet af 20'ere, der går til en dobbelttrappe med trinhøjde 1 er altså n^2, hvis det højeste trin består af n styk 20'ere.

2. Trinhøjde > 1.

Hvis trinhøjden er h (dvs. hvis vi til hvert trin bruger h stk. 20'ere), og hvis både venstre og højre trappe består af n trin (inkl. det øverste), vil det højeste trin bestå af $n \cdot h$ stk. 20'ere, og til hele trappen bruges i alt $n^2 \cdot h$ 20'ere.

D

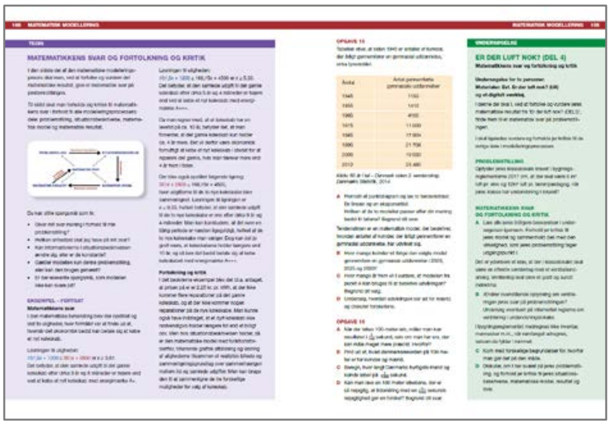
Trinhøjde 1.

Da $\sqrt{500.000} \approx$ 707,10678... kan den højeste søjle (midtersøjlen) ikke bestå af mere end 707 stk. 20'ere. Højden bliver så 707·0,235 = 166,145 cm. Anis har så ikke brugt alle sine 20'ere – der er 151 tilovers.

Trinhøjde > 1.

Den højeste trappe fås ved at vælge det mindst mulige antal trin (hvis der overhovedet skal være en trappe), dvs. 3 trin. Så vil trinhøjden være 500.000:4 = 125.000, og det højeste trin er 500.000·0,235 = 58.750 cm højt (587,5 m).

Man kan selvfølgelig påstå, at den højeste trappe fås ved kun et vælge ét trin, hvor højden iflg. spørgsmål B så er 1 km 175 m.

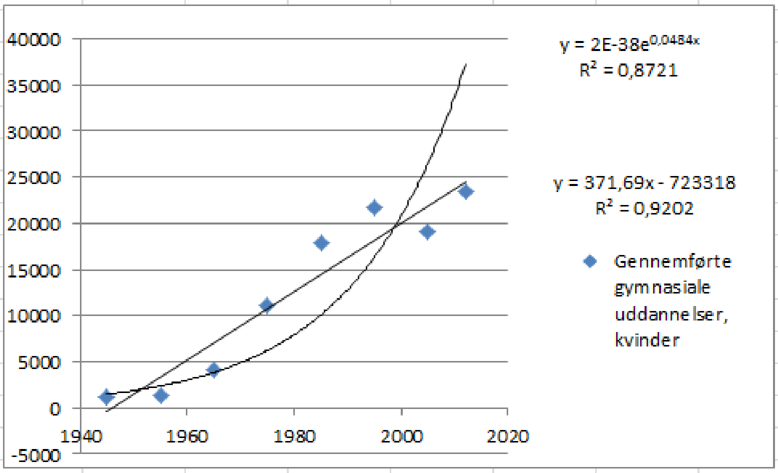


FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

OPGAVE 15

A Herunder ses et skærmdump fra et regneark, som indeholder det krævede. Det ses, at R-kvadratværdien er størst for den lineære model, så det er denne tendenslinje, der passer bedst til de viste data.

1945	1955	1965	1975	1985	1995	2005	2012
1183	1412	4165	11009	17904	21708	19030	23495



B Ved at indsætte tallene 2020, 2025 og 2030 i modellerne fås:

Den lineære model:

2020:	27.496
2025:	29.354
2030:	31.213

Den eksponentielle model:

2020:	57.694
2025:	73.491
2030:	93.612

Tallene bekræfter, at den eksponentielle model ikke kan være god.

C Begrundet elevvurdering af modellernes rækkevidde i tid.

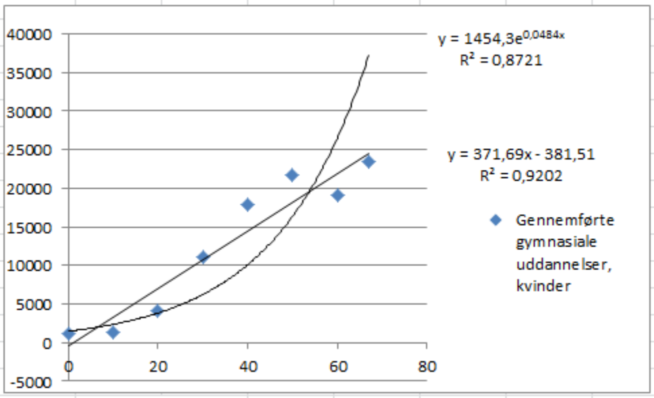
D Elevundersøgelse.

Efterskrift:

I ovenstående modeller er årstallet benyttet som uafhængig variabel. Det bevirker, at man får nogle meget små og nogle meget store parameterværdier i funktionsudtrykkene. Her er fx faktoren til eksponentialfunktionen lig med $2 \cdot 10^{-38}$ og b-værdien i det lineære udtryk er 723.318.

Det kan delvist undgås ved at bruge "antal år efter 1945" som uafhængig variabel. Det er gjort i nedenstående regneark. Det giver naturligvis nogle andre funktionsudtryk, men bemærk, at R^2-værdierne er de samme, hvad de også gerne skulle være.

Funktionsværdierne, når man indtaster 75 i stedet for 2020 (75 = 2020 – 1945) osv., burde også være de samme, men her viser det sig imidlertid, at computerens regnenøjagtighed kan komme til kort:



Lineær model:			Værdi:
2020 =	75		27.495
2025 =	80		29.354
2030 =	85		31.212
Eksponentiel model:			Værdi:
2020 =	75		54.846
2025 =	80		69.862
2030 =	85		88.990

Det betyder ikke, at en af de to modeller er *forkert*. Det betyder blot, at der er grænser for hvor mange cifre en normal computer regner med, og at afrundingsfejl (specielt når man regner med numerisk meget små tal som $2 \cdot 10^{-38}$) kan forekomme. Og så betyder det, at matematiske modeller nok kan give et fingerepeg om retningen af en udvikling, men ikke repræsenterer den skinbarlige sandhed!

Skal man fæste særlig lid til en af modellerne må det være den sidste – selv om det i princippet er samme model.

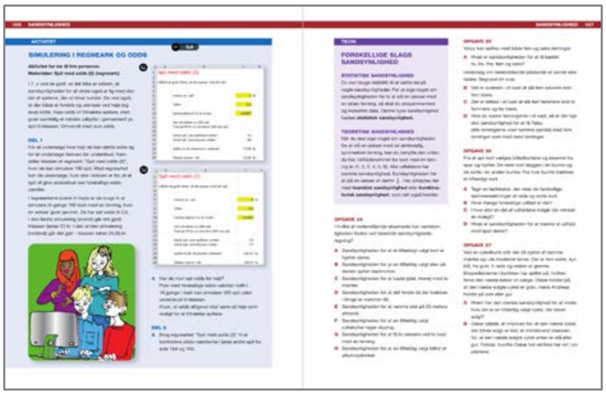
OPGAVE 16

A — Elevforklaring. Det kan være fornuftigt at bede eleverne besvare spørgsmål B-D, før de besvarer dette spørgsmål.

B — I skrivende stund (efterår 2017) er danmarksrekorderne for 100-meter-løb:
Mænd: 10,29 sekunder (sat den 18.9.2004 af Morten Jensen)
Kvinder: 11,42 sekunder (sat den 7.8.1983 af Dorthe Wolfsberg)

C — Gennemsnitsfarten på de 100 m, da rekorderne blev sat, var
Mænd: 9,7183 m/s
Kvinder: 8,7566 m/s
På $\frac{1}{1000}$ sekund har manden derfor løbet 9,7183 mm, og kvinden har løbet 8,7666 mm.

D — Svaret er formentlig nej, og begrundelsen ligger i svaret på spørgsmål C.



FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

UNDERSØGELSE: KAN MAN TJENE PENGE PÅ AT LAVE SODAVAND?

DEL 1

A	Elevers beskrivelse af indkøb.
B	Eleverne finder priser på varer fra punkt A. Prisen på sodavand fastsættes.
C	Forslag til ingrediensliste.

DEL 2

A	Funktioner, der for hvert af de tre forslag angiver den samlede pris som funktion af antal fremstillede/købte sodavand.
B	Sammenhæng mellem antal solgte sodavand og samlet indtægt.
C	Undersøgelse af minimumssalg, hvis der skal være overskud.

DEL 3

A-B	Intet fast facit.
C	Manglende "ting" (parametre, variable, ...) i modellen.
D	Forberedelse af oplæg.

UNDERSØGELSE: FYLD ET BADEKAR, DE ER UTÆT

DEL 1

A Eleverne fremstiller et regneark. Se evt. bemærkningerne til modellen efter denne opgave.
Alternativt kan regnearket "MULTI8_kap9_Badekar" hentes på systemets hjemmeside. Det er dette regnerark, der henvises til i besvarelsen her.

B Ved at kopiere kolonne A, B og C nedad indtil tallene i kolonne A overstiger 19 kan man se, at der efter 19 minutter er 216,93 L i karret, mens der efter 20 minutter ville være 227,79 L, hvis der var plads. Karret fyldes således (225 L) på ca. 20 minutter.

	A	B	C
1	Vand ind pr. minut	Andel ud pr. minut	
2	12	0,005	
3			
4	Minut nr.:	Vand i karret (liter):	Spildt vand i alt (liter):
23	19	216,93	11,07
24	20	227,79	12,21

C Af kolonne C (celle C23 og C24) fås, at der går mellem11,07 og 12,21 L til spilde.

D Hvis proppen er tæt, kan tallet i celle B2 ("Andel ud pr. minut") sættes til 0 (nul). Indholdet i karret vil da overstige 225 L efter 19 minutter.

	A	B	C
1	Vand ind pr. minut	Andel ud pr. minut	
2	12	0	
3			
4	Minut nr.:	Vand i karret (liter):	Spildt vand i alt (liter):
22	18	216,00	0,00
23	19	228,00	0,00

Til at besvare netop dette spørgsmål er modellen selvfølgelig ikke nødvendig. Hvis karret er tæt, fyldes der præcis 12 L i pr. minut, og de 225 L nås efter 225:12 = 18,75 minut (18 minutter og 45 sekunder).

E Eleverne kan fx "skrue" på indholdet af celle B2, indtil celle B64 (indhold efter 60 minutter) bliver 225. Det viser sig så, at hvis der løber 4,813 % ud pr. minut, vil der efter 60 minutter være 225,02 L i karret. Det er imidlertid en ganske urimelig præcision, som modellen ikke kan bære, så et svar på 4,8 % eller ca. 5 % vil være tilfredsstillende.

F Nej, det er ikke rigtigt. Hvis der ryger 5 % ud pr. minut, vil indholdet i karret overstige 225 L efter 85 minutter (1 time og 15 minutter).
Men hvis der ryger 5,1 % ud pr. minut, vil karret ikke kunne fyldes. Indtast 0,051 i celle B2 og betragt resultatet.
Indholdet stabiliserer sig tilsyneladende på 223,29 L efter 194 minutter (3 timer og 14 minutter). En nærmere forklaring herpå kan ses i forbindelse med model 2 herunder.

G Elevernes bud på de dele af modelleringsprocessen, som de har arbejdet mest med i punkt A-F.

DEL 2

A Hvis der ryger 7 promille ud pr. minut, vil det tage ca. 20 minutter (mellem 20 og 21) at fylde karret.

B Der vil gå ca. 18,5 L vand til spilde.

C Elevernes bud på de dele af modelleringsprocessen de mener, der hører til at ændre forudsætningerne.

Bemærkninger til "badekarsmodellen"

At fylde et badekar er naturligvis en kontinuert proces, men det er ikke ualmindeligt, når man skal beskrive (og modellere) en sådan proces, at man deler den i adskilte "trin" af en vis varighed og så forestiller sig, at forandringerne i processen sker fx i slutningen af hvert trin ved overgangen til det næste trin.

I bogen foreslås trin af 1 minuts varighed. I løbet af hvert minut tilføres der i alt badekarret 12 L vand, og der forsvinder løbende noget vand. I modellen forestiller vi os, at de 12 liter kommer på én gang i slutningen af trinnet (minuttet), og at der derefter forsvinder 5 promille af alt det vand, der på det tidspunkt er i badekarret.

Det betyder, at der forsvinder mere og mere vand pr. minut i løbet af processen, men det er også en rimelig antagelse. Det er ikke sådan, at utætheden i bundproppen forandrer størrelse, men den mængde vand, der presses ud af karret, afhænger af trykket på bundproppen, og det afhænger igen af højden af vandsøjlen over bundproppen – altså af mængden af vand i karret. Så det er ikke urimeligt at antage, at jo mere vand, der er i karret, desto mere løber der ud pr. minut – selv om procent/promille-delen er den samme gennem hele processen.

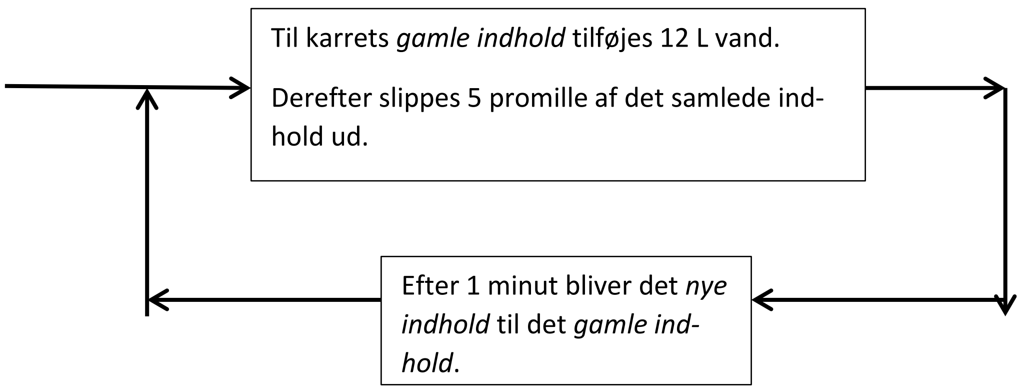
Der er forskellige måder at stille modellen op på – fx en regnearksmodel, hvor man regner sig frem trin for trin eller en algebraisk model, hvor man søger at finde en funktion *f*, hvor funktionsværdien *f*(*n*) er den mængde vand (målt i liter), der befinder sig i karret til tiden *n* (målt i minutter efter start).

Ikke begge disse metoder er tilgængelige for eleverne, men (med hjælp fra lærer, andre elever og klassediskussioner) vil model 1 herunder ("Trinvis fremskrivning") kunne håndteres og forstås af de fleste. Det er da også den, der er brugt i facitlisten.

Model 1. Trinvis fremskrivning

Når vi således har opdelt processen i trin af 1 minuts varighed, må vi se på, hvordan vi kommer fra det ene trin (minut) til det næste?

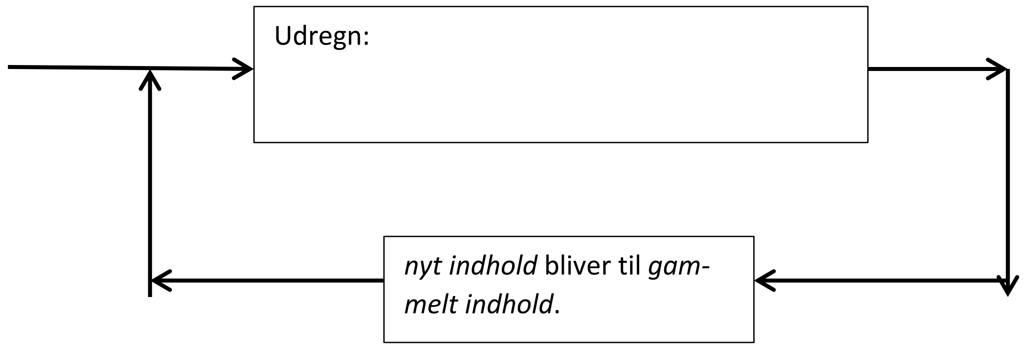
Udtrykt i et almindeligt sprog sker der følgende:



Man skal så bemærke, at ved overgangen til næste trin, sker der *nøjagtigt det samme* – blot med et nyt vandindhold i karret. Dette er essensen i begrebet *trinvis fremskrivning*. Hvis vi blot kan overskue, hvad der sker ved overgangen fra et trin til det næste (fra et minut til det næste), kan vi i princippet overskue hele processen, fordi det er det samme, der sker i hvert trin – blot med andre værdier af de variable, der indgår.

Det er ikke umuligt at forestille sig, at en klassesamtale – med de rette spørgsmål fra læreren – kunne lede til en erkendelse af dette mønster.

Nu skal vi formalisere og generalisere processen. Vi vil betegne det antal liter, der fyldes i pr. minut med *a* og den procentdel (noteret som decimaltal), der *ikke* ryger ud igen med *p*. Bogens tal svarer så til $a = 12$ og $p = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$.



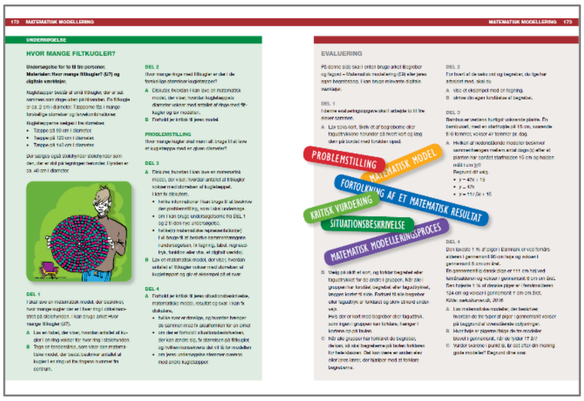
I regnearket er det vandindhold, der hører til minuttallene i A-søjlen udregnet i B-søjlen. I skærmdumpet herunder ses regneudtrykket i celle B13:

= (A$2 + B12)*(1 – B$2)

Celle A2 indeholder værdien den variable, der her er kaldt *a* (12), celle B12 er "*gammelt indhold*", og "1 – B2" er *p*-værdien. Værdien af udtrykket i celle B13 (105,34) er "*nyt indhold*" – indtil vi går ned i celle B14, hvor det bliver til "*gammelt indhold*". Dollarmarkering af søjlenummeret i A$2 og B$2 skal naturligvis sikre, at man ved kopiering nedad stadig henviser til de to inddataceller A2 og B2.

B13 | fx | =(A$2+B12)*(1-B$2)

	A	B	C
1	Vand ind pr. minut	Andel ud pr. minut	
2	12	0,005	
3			
4	Minut nr.:	Vand i karret (liter):	Spildt vand i alt (liter):
11	7	82,34	1,66
12	8	93,87	2,13
13	9	105,34	2,66
14	10	116,75	3,25
15	11	128,11	3,89



FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

UNDERSØGELSE: HVOR MANGE FILTKUGLER?

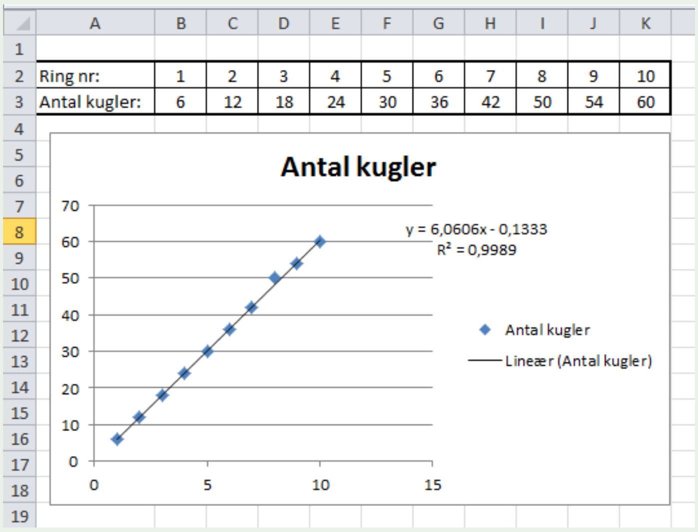
Til et problem som det foreliggende er der flere mulige angrebsvinkler, flere mulige modeller og flere mulige måder at udtrykke et løsningsforslag på. Det er derfor vigtigt at bemærke, at forslagene herunder på ingen måde har kanonisk status, men blot er ét forslag til løsning blandt flere andre. Elevernes besvarelser skal altså vurderes på deres egne præmisser – ikke ved sammenligning med dette forslag, der blot skal give idéer til, hvordan elever, der evt. går helt i stå, kan hjælpes i gang med arbejdet

DEL 1

A På figuren fra U7 kan man fortage en simpel optælling af antallet af kugler i hver ring omkring stolehyndens centrum. Resultatet er vist i denne tabel.

Ring nr.:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antal kugler:	6	12	18	24	30	36	42	50	54	60

B En lineær tendenslinje kan ses i dette skærmdump fra et regneark.



Som man kan se af tabellen fra A, øges antallet af kugler med 6 for hver ring – undtagen fra ring 7 til 8 og fra ring 8 til 9, hvor springene er 8 hhv. 4. Da gennemsnittet af 8 og 4 imidlertid netop er 6, vil vi antage, at det er meningen at hver ring skal indeholde 6 kugler mere end den foregående. Da filtkuglerne imidlertid ikke har helt samme størrelse, kan der ved fabrikationen forekomme små afvigelser fra dette. Men vores generelle model er altså:

Antallet af kugler i ring nr. n er $6n$.

DEL 2

A Elevdiskussion af matematisk model for, hvordan diameteren vokser med antal ringe.
Vi har den oplysning, at på stolehynden er der 10 ringe, og hynden er ca. 40 cm i diameter. Diameteren er derfor 20 "ringe" lang, så det peger i retning af en diameterforøgelse på 4 cm for hver ekstra ring. Det passer pænt med oplysningen om, at filtkuglerne har en diameter på ca. 2 cm.
En mulig model kunne altså være (udtrykt i dagligsproget):

Kugletæppets diameter vokser med 4 cm for hver ring, der sættes på.

B Elevdiskussion: Modelkritik.

DEL 3

A Elevdiskussion af model, der viser, hvordan antal filtkugler vokser med størrelsen af kugletæppet.

B Elevernes model.

Med udgangspunkt i den model, der er præsenteret her (DEL 1B), kunne fx følgende overvejelser komme på tale.

Vi vil først gøre os klart, hvad der menes med "størrelsen" af kugletæppet. Da tæppet er en todimensional flade, kunne man med størrelse mene areal. Alle tæpperne er på den anden side cirkulære Derfor afhænger arealet udelukkende af cirklens radius eller diameter. Da diameteren har været i spil tidligere, vælger vi denne problemstilling:

Beskriv, hvordan antal filtkugler til filttæppet vokser med længden af tæppets diameter.

Fra DEL 2 har vi, at diameteren vokser med 4 cm for hver ring. Vi søger derfor en sammenhæng mellem antal ringe, diameterens længde og antallet af kugler, der bruges. Noget i retning af en tabel som denne:

Antal ringe i tæppet	1	2	3	...
Tæppets diameter	4	8	12	...
Antal kugler i tæppet	6	6 + 12 = 18	18 + 18 = 36	...

Vi har allerede styr på fortsættelsen af de to første rækker i tabellen:.

Antal ringe i tæppet: 1, 2, 3, ..., n, ...
Tæppets diameter: 4, 8, 12, ..., $4n$, ...

Tæppets diameter vil efter denne model blive et multiplum af 4 – et tal i 4-tabellen. Vi ved (DEL 1B), at antallet af kugler i ring nr. n er $6n$.

Det vi mangler, er et regneudtryk for antallet af kugler i et tæppe med *n* ringe. Vi vil gerne udtrykke dette antal ved *n*. Da der i ring nr. *n* er 6*n* kugler, vil dette antal være:

$$S_n = 6 + 12 + 18 + 24 + \ldots + 6n$$

Dette er en differensrække med første led 6 og med differensen 6. Eleverne har tidligere i *MULTI 7* (kapitel 2, Tal i mængder) arbejdet med differensrækker (undersøgelsen Differensrækker og summer, side 17), men de har næppe udviklet en generel formel for summen S_n af de *n* første led i en differensrække:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

hvor a_1 er rækkens første led, og a_n er rækkens *n*'te led. Tænker eleverne i disse baner, kan formlen udleveres til dem.

Her får vi: $$S_n = \frac{n}{2} \cdot (6 + 6n) = n \cdot (3 + 3n) = 3n^2 + 3n$$

Vores model er altså:

Til et tæppe med diameter 4*n* skal der bruges $3n^2 + 3n$ kugler.

Eksempel: i undersøgelsens indledning omtales et tæppe med diameter 140 cm (4·35 cm). Til dette tæppe bruges $3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 = 3.780$ kugler.

DEL 4

A Elevdiskussion i relation til hele modelleringsprocessen, som den er forløbet her.

EVALUERING

DEL 1-2

A – C Elevaktivitet. Eleverne forklarer betydningen af de begreber, de har lært om.

DEL 2

A – B Elevaktivitet. Eleverne viser eksempler på og skriver deres egen forståelse af de begreber, de har lært om.

DEL 3

A Det er udtrykket

$$y = 117{,}5x + 15$$

der angiver højden af bambusplanten x døgn efter starthøjden 15 cm. De 47 tommer er her omsat til cm (1 tomme ≈ 2,5 cm, dvs. 47 tommer ≈ 117,5 cm).

Udtrykket $y = 47x + 15$ blander de to måleenheder tommer og cm. Væksthastigheden er 47 *tommer* pr. døgn, starthøjden er 15 *centimeter*.

Udtrykket $y = 47x$ angiver væksten i tommer. Det er for så vidt rigtigt nok – men starthøjden glemmes.

Et fjerde udtryk kunne være $y = 47x + 6$. Det er også korrekt – nu er højden blot målt i tommer (15 cm = 15:2,5 tommer = 6 tommer).

DEL 4

A I alle tre modeller herunder angiver x pigernes alder ($5 \leq x \leq$ den alder, hvor væksten stopper), og y angiver pigernes gennemsnithøjde i alderen x.

Model 1 (de laveste).

$$y = 5(x - 5) + 98 = 5x + 73$$

Model 2 (gennemsnittet).

$$y = 6(x - 5) + 111 = 6x + 81$$

Model 3 (de højeste).

$$y = 7(x - 5) + 124 = 7x + 89$$

B Model 1: 158 cm
Model 2: 183 cm
Model 3: 208 cm

C Elevvurdering af svarene i B.