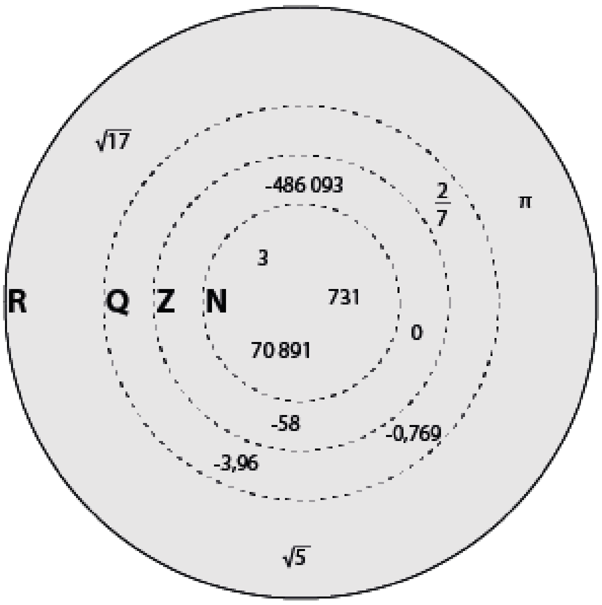
OM KAPITLET

I dette kapitel om tal i mængder skal eleverne arbejde med de naturlige tal N, de hele tal Z og de rationale tal Q. Eleverne skal ligeledes erfare, at der er brug for endnu flere tal end de rationale tal, hvorfor de irrationale tal og talmængden de reelle tal R bliver introduceret.

Formålet med kapitlet er, at eleverne gennem arbejdet med opgaver, undersøgelser og aktiviteter skal få større viden om, hvordan vores talsystem er opbygget og et overblik over tallene og deres forskellige egenskaber.

Eleverne skal ligeledes have en forståelse for, at de forskellige typer af tal, de har arbejdet med og gennemgået i kapitlet, kan ordnes i en række mængder, hvor hver mængde er en delmængde af den næste mængde.



I den første del af kapitlet arbejder eleverne med de naturlige tal N. De naturlige tal kaldes også "tælletallene". Eleverne arbejder med forskellige egenskaber ved de naturlige tal, fx lige tal og ulige tal samt primtal og sammensatte tal. I den forbindelse møder eleverne de to historiske matematikere - Gauss og Eratosthenes.

Herefter arbejder eleverne med de hele tal Z, hvor de bl.a. skal undersøge de negative tal og regningsarterne.

I den efterfølgende del skal eleverne arbejde med de rationale tal Q, hvor de bl.a. præsenteres for de endelige og uendelige decimaltal, og de skal undersøge delelighedsregler og rester ved division. Eleverne skal desuden arbejde med omskrivning af meget store og meget små tal til eksponentiel notation og tegne en model af vores solsystem.

I den sidste del af kapitlet introduceres de irrationale tal og dermed mængden R af reelle tal. Eleverne arbejder med irrationale tal, herunder tallet π.

I kapitlets tema: `Arkitekt i Centicube City´ skal eleverne "konstruere" ungdomsboliger ud fra nogle givne regler. Modellen af de forskellige ungdomsboliger bygges i centicubes, som eleverne efterfølgende skal inddele i forskellige grupper ud fra fælles matematiske karakteristika, fx ud fra totabellen (to-talssystemet), primtal m.m.

ELEVFORUDSÆTNINGER

Eleverne har i *MULTI 4*, *MULTI 5* og *MULTI 6* arbejdet med tallene og deres egenskaber indenfor talmængderne N, Z og Q.
I *MULTI 4* mødte eleverne begrebet "talmængder", og det blev forklaret, at alle tal tilhører en talmængde. Der arbejdes ikke formaliseret med talmængder i *MULTI 5* og *MULTI 6*. Det vil derfor være relativt nyt for de fleste elever, at man kan inddele tallene i mængder efter, hvilken type tal de er.

Eleverne har på mellemtrinnet arbejdet med tallet π i forbindelse med beregning af omkreds og areal i en cirkel, men de har ikke tidligere mødt eller arbejdet med andre irrationale tal, og de kender ikke begreberne irrationale tal eller reelle tal. De har

Eleverne har i *MULTI* på mellemtrinnet arbejdet med:

- at kunne inddele tallene i talmængderne N, Z og Q
- at regne med negative tal
- at opløse tal i primfaktorer
- at omskrive og regne med kvadratrod (dog ikke irrationale tal)
- at finde en cirkels omkreds og areal ved brug af tallet π.

ELEVMÅL FOR KAPITLET

Målet er, at eleverne:

- kan forstå sammenhænge og ligheder mellem talmængderne N, Z, Q og R,
- kan anvende de naturlige tal, hele tal, rationale tal og reelle tal i forskellige sammenhænge,
- kender til og kan undersøge og udforske primtallene og deres egenskaber,
- kan skrive meget små og meget store tal ved hjælp af eksponentiel notation,
- kan beskrive og forklare sammenhænge ved hjælp af matematik.

HUSKELISTE

PRINTARK

- U1 Tal- og symbolkort
- U2 Primtal
- E1 Begreber og fagord – Tal i mængder

MATERIALER

- A3-papir
- Centicubes

DIGITALE VÆRKTØJER

- Regneark

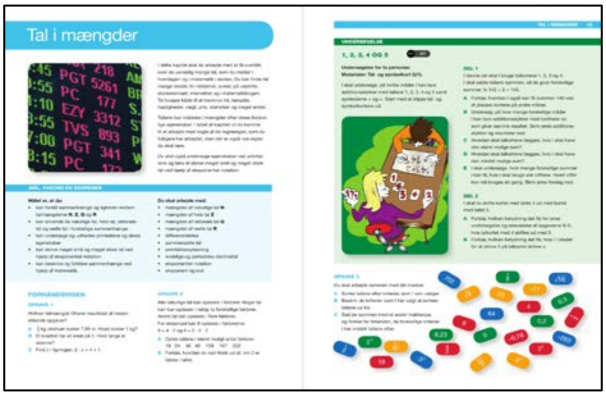
FAGLIGE BEGREBER

I kapitlet arbejdes med følgende centrale fagord og begreber:

- Mængden af naturlige tal N
- Mængden af hele tal Z
- Mængden af rationale tal Q
- Mængden af reelle tal R
- Differenskæder
- Sammensatte tal
- Primfaktoropløsning
- Eksponentiel notation
- Eksponent og rod.

FÆLLES MÅL

På *MULTIs* hjemmeside er der en oversigt over, hvilke Fælles Mål der er sat op for arbejdet med kapitlet.



MÅL OG FAGLIGT INDHOLD

På de to sider bliver eleverne introduceret for kapitlets elevmål, fagord og begreber. I de efterfølgende opgaver og undersøgelsen er formålet at aktivere elevernes forhåndsviden om emnet.

Eleverne bliver indledningsvis introduceret til emnet "Tal i mængder". I introteksten gives en kort beskrivelse af, hvad emnet handler om.

Eleverne har i *MULTI 4* mødt begrebet "talmængder", men det vil for de fleste elever være nødvendigt at repetere, hvad en talmængde - eller en "mængde" - er.
En mængde er en afgrænset samling af elementer - i dette tilfælde er det en samling tal med samme egenskaber. Tegn fx de fire forskellige talmængder på tavlen, og forklar, hvordan hver mængde er en delmængde af den næste mængde. Fx er de naturlige tal **N** en ægte delmængde af de hele tal **Z**, da alle tal i talmængden **N** er en del af talmængden **Z**. En "ægte" delmængde vil i dette tilfælde sige, at de to talmængder **N** og **Z** ikke er samme mængde.

Herefter præsenteres eleverne for kapitlets fem elevmål samt fagord og begreber.

I arbejdet med forskellige opgaver og en undersøgelse får eleverne aktiveret deres forhåndsviden om emnet.

PRINTARK

- U1 Tal- og symbolkort.

FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

OPGAVE 1

Alle tallene er reelle tal, så opgaven er at finde den *mindste* talmængde, som resultaterne tilhører.

A Q

B R (sidelængden er $\sqrt{5}$, som er irrational).

C Q

Hvis det indledningsvist er repeteret, hvad en talmængde er, så kan eleverne bruge deres viden herfra.

OPGAVE 2

A
$19 = 1 \cdot 19$ $\quad$ $24 = 2^3 \cdot 3$
$36 = 2^2 \cdot 3^2$ $\quad$ $49 = 7^2$
$159 = 3 \cdot 13$ $\quad$ $167 = 1 \cdot 167$
$222 = 3 \cdot 37$

B 2 er faktor i et tal, hvis tallet er lige, dvs. hvis tallets sidste ciffer er 0, 2, 4, 6 eller 8.

Tal evt. med eleverne om, hvad begrebet "faktor" betyder. "Faktor" er et tal, som indgår i en multiplikation.

UNDERSØGELSE: 1, 2, 3, 4 OG 5

DEL 1

A $142 + 3 = 145$ (Ingen andre måder).

B Formålet med opgaver af denne art er at udvikle systematik som eleverne er nødt til at benytte for at sikre sig, at alle resultater er med.
Herunder er ikke medtaget de summer, der kommer af andre ved brug af den kommutative lov, for addition, dvs. når fx $14 + 23$ er nævnt, vil $23 + 14$ ikke blive nævnt. De forskellige summer er da:
$14 + 23 = 24 + 13 = 37$
$12 + 34 = 14 + 32 = 46$
$12 + 43 = 13 + 42 = 21 + 34 = 24 + 31 = 55$
$21 + 43 = 23 + 41 = 64$
$32 + 41 = 31 + 42 = 73$

C Den størst mulige sum er
$432 + 1 = 431 + 2 = 433$.

D Den mindst mulige sum er
$1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

E Foruden de nævnte mangler der de tal, der er summer af et 3-cifret og et 1-cifret tal. Der er i alt 24 forskellige summer af denne slags, der dog to og to giver samme resultat:
$123 + 4 = 124 + 3 = 127$
$132 + 4 = 134 + 2 = 136$
$213 + 4 = 214 + 3 = 217$
$231 + 4 = 234 + 1 = 235$

312 + 4 = 314 + 2 = 316
321 + 4 = 324 + 1 = 325
142 + 3 =143 + 2 = 145
241 + 3 = 243 + 1 = 244
412 + 3 = 413 + 2 = 415
421 + 3 = 423 + 1 = 424
341 + 2 = 342 + 1 = 343
431 + 2 = 432 + 1 = 433

DEL 2

A Alle summer bliver større. Nogle bliver 1 større (hvis 4-tallet står på enernes plads), nogle bliver 10 større (4-tallet på tiernes plads), og nogle bliver 100 større (4-tallet på hundredernes plads).

B Eleverne overvejer, hvordan resultaterne påvirkes, hvis der skrives et andet ciffer end 5 på de pladser, hvor der står 5 i punkt A.

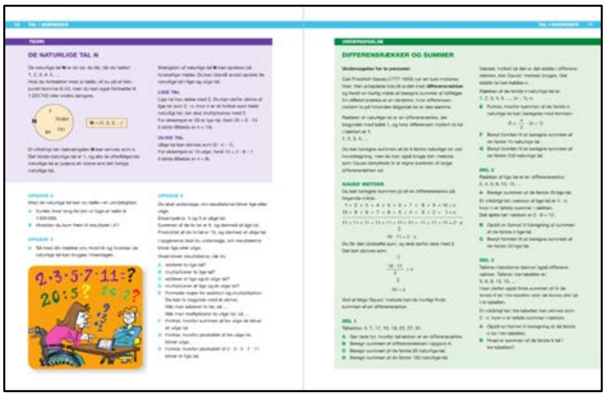
OPGAVE 3

A Eleverne kan sortere tallene på mange forskellige måder ud fra forskellige kriterier, fx

- Lige og ulige tal
- Talmængderne N, Z, Q og R
- Brøker og decimaltal
- ...

B - C Elevernes egne svar.

Eleverne kan fx lave kort med de forskellige tal på, som de kan placere i bunker ud fra de kriterier, som de sorterer tallene i. Det kan være mere overskueligt, da det hjælper til at fokusere på et enkelt tal ad gangen.
Eleverne kan ligeledes opfordres til at have en bunke med tal, som de kan have svært ved at placere ud fra deres valgte kriterier. I arbejdet med punkt C kan de tale med et andet makkerpar om, hvorfor de har svært ved at placere nogle af tallene. Måske de ved fælles hjælp kan placere tallene i de rigtige bunker, eller måske kan de slet ikke placeres inden for de givne kriterier. Hvis eleverne er i tvivl, kan de tale med læreren.



MÅL OG FAGLIGT INDHOLD

Eleverne skal arbejde med mængden af naturlige tal **N**. De bliver præsenteret for en formel, der beskriver et lige tal og en formel, der beskriver et ulige tal.

Eleverne skal efterfølgende undersøge differensrækker og summer ved hjælp af Gauss´ metode.

FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

TEORI: DE NATURLIGE TAL N

De naturlige tal kaldes også "tælletallene", da det er de tal, vi får, når vi tæller 1, 2, 3, 4 ...

Som det er beskrevet i teoriboksen, så kan de naturlige tal opdeles på forskellige måder og her er vist lige tal og ulige tal. Tal med eleverne om, på hvilke andre måder tallene kan opdeles i, fx primtal og tabeller.

Det er nyt for eleverne, at beskrive et vilkårligt tal i talmængden **N** med den variable *n*. Lad eleverne parvis tale om den måde de lige tal og ulige tal er beskrevet på. De kan efterfølgende selv beskrive andre naturlige tal med den variable *n*, fx 3-tabellen $(n \cdot 3)$ eller kvadrattallene (n^2).

OPGAVE 4

A - B Elevernes egne svar.

Eleverne kan fx tage tid på, hvor lang tid det tager at tælle til eksempelvis 100 og derefter gange tiden med 10 000. Det tager dog længere tid at tælle, jo større tallene bliver. Derfor kan en mulighed også være at tælle fra 999 900 til 1 000 000 og gange tiden med 10 000, da det kan give et bedre billede af den tid det tager at tælle til 1 000 000.

OPGAVE 5

A Elevernes egne svar, men fx alder, antal jordbær i en bakke, skostørrelse, antal elever i klassen.

OPGAVE 6

A Summen af to lige tal er lige.

B Produktet af to lige tal er lige.

C Summen af et lige og et ulige tal er ulige.

D Produktet af et lige og et ulige tal er lige.

E De regler, der ikke er behandlet under A – D er:
Summen af to ulige tal er lige.
Produktet af to ulige tal er ulige.

F Sum af tre ulige tal:
ulige + ulige + ulige =
(ulige + ulige) + ulige =
lige + ulige (iflg. E) = ulige (iflg. C)

G Produkt af tre ulige tal:
ulige • ulige • ulige =
(ulige • ulige) • ulige =
ulige • ulige (iflg. E) = ulige (igen iflg. E)

Når et tal (lige eller ulige) multipliceres med 2, bliver produktet lige, og 2 er en faktor i dette tal. Derfor bliver produktet lige.

UNDERSØGELSE: DIFFERENSKÆDER OG SUMMER

DEL 1

A Differensen mellem hvert led og det foregående er den samme (4) rækken igennem. Derfor er rækken en differensrække.

B $S = 136$

C $S_{25} = 325$

D $S_{100} = 5050$

E Ved at bruges Gauss metode får man:
$2S = (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1)$
med i alt n addender, dvs.:
$2S = n \bullet (n + 1)$
og ved division med 2 fås:
$$S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

F $S_{15} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 8 = 120$

G $S_{50} = \frac{250 \cdot 251}{2} = 125 \bullet 251 = 31\,375$

DEL 2

A $S_{20} = 420$

B Ved at bruge Gauss metode får man for summen S_n af de første n lige tal: $S_n = n \bullet (n + 1)$

C $S_{250} = 62\,550$

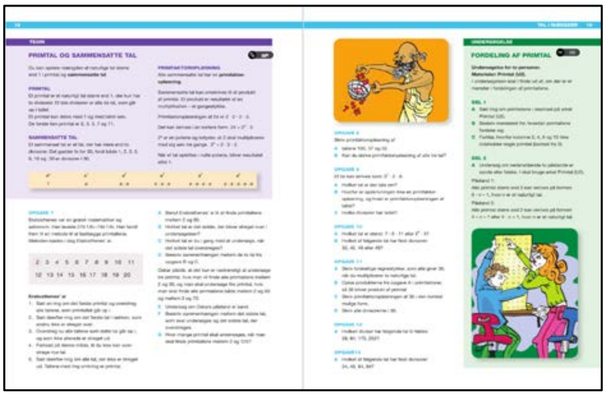
DEL 3

A Gauss metode giver: $S_n = \frac{n \cdot (3+3n)}{2}$

B Summen af de første 10 tal i tre-tabellen er $S_{10} = 165$.

Undersøgelsen vil for nogle elever forekomme meget teoretisk, hvorfor de kan have behov for en del støtte.

I de punkter, hvor eleverne skal selv skal opstille en formel, kan der fx differentieres ved at give eleverne formlen og lade dem prøve at forklare, hvorfor formlen ser ud, som den gør. En udvidelse af undersøgelsen kan være at lade eleverne selv lave andre formler der beskriver summen af forskellige differensrækker.



MÅL OG FAGLIGT INDHOLD

Eleverne skal undersøge forskellige forhold vedrørende primtal og sammensatte tal.

I arbejdet med primtallene bliver eleverne præsenteret for en metode til at fastlægge primtallene - metoden kaldes Eratosthenes' si.

Eleverne har på mellemtrinnet i *MULTI 5* arbejdet med primtal, sammensatte tal og med at opløse tal i primfaktorer, så den del er ikke ny for eleverne, men her i *MULTI 7* arbejdes mere undersøgende med primtallene, hvilket er nyt for eleverne.

Målet er, at eleverne forstår, at ethvert naturligt tal større end 1 enten er et primtal eller, at det på en entydig måde kan skrives som et produkt af primtal. Faktorernes rækkefølge er dog ikke entydig, da både den kommutative og den associative lov for multiplikation af reelle tal gælder.

Fx

$$774000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 43$$
$$= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 43$$

Gennem arbejdet med de efterfølgende opgaver og undersøgelse får eleverne et større kendskab til primtallene.

PRINTARK

- U2 – Primtal

FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

TEORI: PRIMTAL OG SAMMENSATTE TAL

Da indholdet i teoriboksen ikke er nyt for eleverne, kan eleverne fx læse og gennemgå indholdet parvis eller i mindre grupper.

Inden eleverne arbejder videre med opgaverne og undersøgelsen på opslaget, kan der tages en klassesamtale om teoriboksens indhold, og eksemplet der er beskrevet under "Mål og fagligt indhold".

OPGAVE 7

A Primtallene mellem 2 og 50 (begge inkl.) er:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 og 47.

B Tallet 49.

C Tallet 7.

D Sammenhængen er, at $7^2 = 49$ (eller, at $\sqrt{49} = 7$).

E Oscars påstand er sand. Primtal nr. 4 er 7, og 7 er det største primtal, der er mindre end $\sqrt{70}$.

F Hvis det sidste tal, der skal undersøges kaldes n, så vil det sidste tal, der skal overstreges, være større end eller lig med n^2 og mindre end $(n + 1)^2$.

G Der skal undersøges 5 primtal (2, 3, 5, 7 og 11).

Eleverne kan arbejde parvis med opgaven, så de kan diskutere metoden med *Eratosthenes´ si* og deres resultater. Som en hjælp til arbejdet med opgaven kan eleverne få udleveret printarket "U2 Primtal", som de skal bruge til undersøgelsen "Fordeling af primtal".

OPGAVE 8

A $100 = 2^2 \cdot 5^2$
37
$32 = 2^5$

B Ikke af 37, da det er et primtal.

OPGAVE 9

A $3^2 \cdot 2 \cdot 6 = 108$

B 6 er ikke et primtal.
Primtalsopløsningen af 108 er $2^2 \cdot 3^3$.

C Divisorerne i 108 er 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54 og 108.

OPGAVE 10

A Det største af tallene er $2^8 \cdot 3$.

B Antallet af divisorer i tallene 32, 42, 46 og 49 er hhv. 6, 8, 4 og 3, så tallet 42 har flest divisorer.

OPGAVE 11

A De mulige svar er: $1 \cdot 36$, $2 \cdot 18$, $3 \cdot 12$, $4 \cdot 9$ og $6 \cdot 6$.

B $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

C $36 = 2^2 \cdot 3^2$

D Divisorerne i 36 er 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 og 36.

OPGAVE 12

A Den fælles divisor for de fire tal er 7.

OPGAVE 13

A Tallet 24 har 8 divisorer, tallet 49 har 3 divisorer, tallet 84 har 16 divisorer og tallet 94 har 4 divisorer.
Det er således tallet 84, der har flest divisorer.

UNDERSØGELSE: FORDELING AF PRIMTAL

DEL 1

A Eleverne sætter ring om primtallene på printarket U2 Primtal.

B Elevernes beskrivelse af mønsteret for primtallenes fordeling.

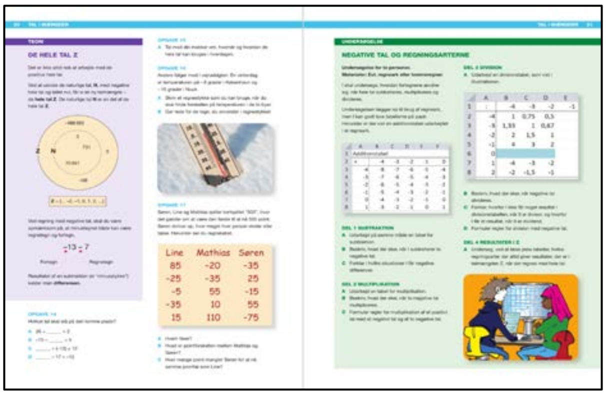
C Alle tal i de pågældende kolonner er lige tal og derfor (når tallene er større end 2) sammensatte tal.

DEL 2

A Eleverne kan på baggrund af printarket U2 Primtal kun udtale sig om de primtal, der er mindre end 100.

Påstand 1:
Påstanden er ikke sand. For eksempel er 7 et primtal, der *ikke* er på formen $6n - 1$.
Det er imidlertid generelt sandt, at ethvert primtal større end 3 *enten* er på formen $6n - 1$ *eller* på formen $6n + 1$.

Påstand 2:
I første oplag af *MULTI 7* er der en trykfejl.
Tallet "$4 - n - 1$" skal være tallet "$4 \cdot n - 1$".
Så er påstanden sand – og den gælder også generelt.



MÅL OG FAGLIGT INDHOLD

Eleverne skal arbejde med mængden af hele tal Z. De skal undersøge og formulere regler for, hvordan fortegnene ændrer sig, når hele tal subtraheres, multipliceres og divideres.

Eleverne har på mellemtrinnet arbejdet med negative tal og regning med negative tal, hvor de på lommeregneren har undersøgt de forskellige regler for regning med negative tal.
I *MULTI 7* bliver denne del mere formaliseret, og eleverne skal undersøge og selv formulere regler for, hvordan fortegnene ændrer sig ved regning med negative tal.

MATERIALER

- Evt. digitalt værktøj, fx regneark.

FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

TEORI: DE HELE TAL Z

De naturlige tal N udvides til de hele tal Z, så talmængden nu også indeholder 0 og de negativ hele tal.

Lad eleverne læse teoriboksen igennem, og tal om, at minustegnet både kan være et regnetegn og et fortegn. I den sammenhæng kan det være relevant at nævne, at når fortegnet står ved siden af et regnetegn, sætter man en parentes om det negative tal, fx $6 + (-3)$ eller $6 - (-3)$. Man skriver således aldrig et regnetegn og et fortegn lige efter hinanden.

Lad eleverne undersøge, hvordan de bruger deres lommeregner til at regne med negative tal. Det er nødvendigt at huske fortegnet, når man skal skrive negative tal på lommeregneren. Knappen kan fx se sådan ud (–) eller +/–.

OPGAVE 14

De ønskede tal er skrevet med rødt.

A 26 + (–24) = 2
B –75 – (–80) = 5
C 25 + (–13) = 12
D 5 – 17 = –12

OPGAVE 15

A Elevernes egne svar, men fx gæld og temperatur.

OPGAVE 16

A –15 – (–8) eller –8 – (–15).
B Det første minus er fortegn, det næste er regnetegn, og det sidste er fortegn.

OPGAVE 17

A Mathias fører.
B Pointforskellen mellem Mathias og Søren er 165.
C Søren mangler 80 point i at nå Line.

I opgave 15-17 er der fokus på, hvordan negative tal bruges i hverdagen, og eleverne arbejder med addition og subtraktion af negative tal.

UNDERSØGELSE: NEGATIVE TAL OG REGNINGSARTERNE

DEL 1 SUBTRAKTION

A Tabel for subtraktion.

–	–3	–2	–1	0	1	2	3
–3	0	–1	–2	–3	–4	–5	–6
–2	1	0	–1	–2	–3	–4	–5
–1	2	1	0	–1	–2	–3	–4
0	3	2	1	0	–1	–2	–3
1	4	3	2	1	0	–1	–2
2	5	4	3	2	1	0	–1
3	6	5	4	3	2	1	0

B Elevens beskrivelse.

C En subtraktion $a - b$ er negativ, hvis og kun hvis a er mindre end b.

DEL 2 MULTIPLIKATION

A Tabel for multiplikation.

•	–3	–2	–1	0	1	2	3
–3	9	6	3	0	–3	–6	–9
–2	6	4	2	0	–2	–4	–6
–1	3	2	1	0	–1	–2	–3
0	0	0	0	0	0	0	0
1	–3	–2	–1	0	1	2	3
2	–6	–4	–2	0	2	4	6
3	–9	–6	–3	0	3	6	9

B Elevens beskrivelse. Når to negative tal multipliceres, bliver produktet positivt.

C Elevens formulering af regel for multiplikation af et positivt tal med et negativt tal.

Samlet kan man sige om fortegn for produkter: To ens fortegn giver plus, to forskellige fortegn giver minus.

DEL 3 DIVISION

A Tabel for division.

:	–3	–2	–1	0	1	2	3
–3	1	1,5	3		–3	–1,5	–1
–2	0,67	1	2		–2	–1	–0,67
–1	0,33	0,5	1		–1	–0,5	–0,33
0	0	0	0		0	0	0
1	–0,33	–0,5	–1		1	0,5	0,33
2	–0,67	–1	–2		2	1	0,67
3	–1	–1,5	–3		3	1,5	1

B Elevens beskrivelse. Når to negative tal divideres, bliver resultatet positivt.

C Elevens forklaring.

Nul som divisor:

Division er den modsatte regningsart til multiplikation. Hvis man undersøger følgende 6 : 0 og betegner resultatet ved x, så betyder det, at:

$\mathbf{6 : 0 = x}$, hvis og kun hvis $\mathbf{0 \bullet x = 6}$.

Da nul multipliceret med et hvilket som helst tal er nul, så vil $\mathbf{0 \bullet x}$ aldrig give 6. Altså kan det ikke lade sig gøre at dividere *med* 0.

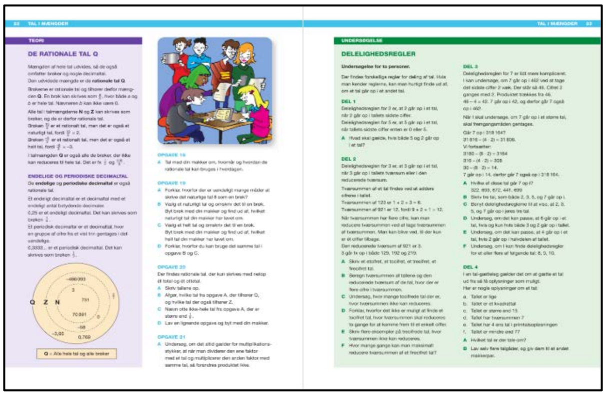
Nul som dividend:

På samme måde som ovenfor kan vi undersøge $\mathbf{0 : 6 = x}$. I dette tilfælde gælder det, at $\mathbf{0 : 6 = x}$, hvis og kun hvis $\mathbf{6 \bullet x = 0}$. Da nul multipliceret med 6 (og et hvilket som helst andet tal) er nul, så vil resultatet af en division med dividenden nul altid være nul.

D Elevens formulering af regler. Fortegnsregler for division er som for multiplikation.

DEL 4 RESULTATER I Z

A Når de tal, der regnes på, tilhører Z, vil addition, subtraktion og multiplikation give hele tal som resultat. Det vil sige, at division er den eneste regningsart, hvor resultatet ikke altid ligger i talmængden Z.



MÅL OG FAGLIGT INDHOLD

Eleverne skal arbejde med mængden af rationale tal **Q.** De skal bl.a. arbejde med opgaver, der handler om at skrive tal ved hjælp af brøker. Der er fokus på at forstå brøker som et tal og som en division, der endnu ikke er udført. Derefter undersøger eleverne forskellige delelighedsregler.

Eleverne har på mellemtrinnet arbejdet med brøker og sammenhængen mellem brøker og decimaltal, men de er ikke siden *MULTI 4* blevet præsenteret for mængden af rationale tal, og de har ikke siden arbejdet formaliseret med talmængden **Q**.

I dette kapitel fokuseres der alene på at forstå definitionen af talmængden **Q**, og først i kapitlet "Brøk, decimaltal og procent" præsenteres eleverne for regneregler m.m.

FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

TEORI: DE RATIONALE TAL Q

I teoriboksen præsenteres og beskrives mængden af rationale tal **Q**, der kan beskrives som alle de hele tal og de tal, der kan skrives som brøker.

De rationale tal kan også beskrives som de decimaltal, der enten er endelige eller periodiske, hvilket er nye begreber for eleverne. Det kan derfor være en god ide at tage en klassesamtale om sammenhængen mellem brøker og decimaltal, og at et brøktal og et decimaltal med samme værdi blot er to forskellige måder at angive samme tal på.

Figuren nederst i teoriboksen kan være udgangspunkt for en klassesamtale om de forskellige talmængder, og hvordan de hænger sammen. Tallet 3 hører fx både til talmængden **N**, **Z** og **Q**, mens tallene $\frac{2}{7}$ og –3,96 kun hører til mængden med rationale tal.

Gennemgangen af teoriboksen kan afsluttes med, at eleverne skal komme med eksempler på tal og placere dem i den rigtige talmængde. Der kan også være krav til om tallet skal være et endeligt eller periodisk decimaltal.

OPGAVE 18

A Elevernes egne svar, men fx bageopskrifter, priser, rumfang af juicekartoner, forskellige længder.

OPGAVE 19

A Elevernes egne svar. Det naturlige tal 8 kan skrives en uægte brøk, hvor resultatet er 8.
Fx $\frac{8}{1}, \frac{16}{2}, \frac{24}{3}$... Der vil altså være uendelig mange måder, hvorpå det naturlige tal 8 kan beskrives som en brøk.

B Elevbesvarelse.

C Elevbesvarelse.

D Fordi ethvert naturligt tal også er et helt tal.

OPGAVE 20

A De rationale tal, der kan skrives med netop ét 2-tal og netop ét 8-tal er: ±28; ±82; $\pm\frac{2}{8}$; $\pm\frac{8}{2}$; ±2,8; ±8,2; $\pm 8^2$; $\pm 2^8$
Tillader man regnetegn, vil også tallene:
$\pm 2 \cdot 8$, $\pm(2 + 8)$ og $\pm(2 - 8)$ kunne bruges.

B Alle tal fra A tilhører **Q**.
Kun tallene $\pm\frac{2}{8}$; ±2,8 og ±8,2 tilhører ikke **Z**.

C Tallene $\frac{2}{8}$, 2,8 og 8,2 er alle ikke-hele tal, der er større end $\frac{1}{5}$.

I første oplag af *MULTI 7* står der "Nævn otte ikke-hele tal…". Det er en fejl. Der skulle blot stå "Nævn de ikke-hele tal fra opgave A, der er større end $\frac{1}{5}$."

D Elevens egen opgave og opgavebytning.

OPGAVE 21

A Ja, det gælder altid: $(a : k) \cdot (b \cdot k) = \frac{a}{k} \cdot (b \cdot k) = \frac{a \cdot b \cdot k}{k} = a \cdot b$ (forkortning med k).

UNDERSØGELSE: DELELIGHEDSREGLER

DEL 1

A Hvis både 5 og 2 skal gå op i et tal, skal tallet ende på 0.

DEL 2

A Elevernes egne udregninger.

B Elevernes egne udregninger.

C Der er 45 tocifrede tal, hvor tværsummen ikke kan reduceres yderligere.

D Det tocifrede tal, der har den højeste tværsum er 99 (tværsum 18). Denne tværsum skal kun reduceres én gang for at blive étcifret.

E Fx 111, 123, 135, 504.

F Højst én gang. Det firecifrede tal, der har den højeste tværsum er 9999 (tværsum 36). Denne tværsum skal kun reduceres én gang for at blive étcifret (9).

DEL 3

A 7 går op i 322, 693, 672 og 441.

B Flere løsninger – fx
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ og
$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$.

C Elevaktivitet.

D Ja, det passer. Hvis 2 og 3 går op i et tal, kan tallet skrives $2 \cdot 3 \cdot n$.
($n \in \mathbb{N}$), dvs. $6 \cdot n$ – altså går 6 også op i tallet.

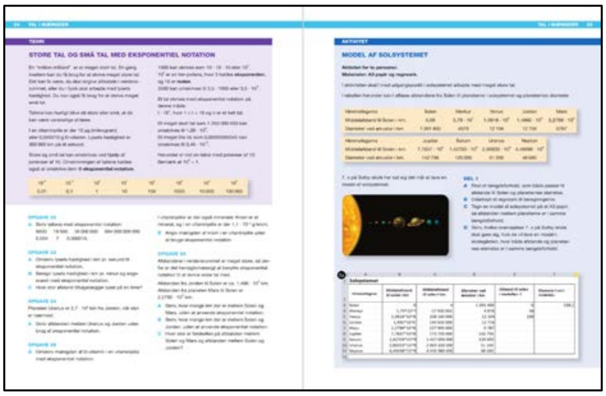
E Ja, det passer.

F 8 går op i et tal, hvis det går op i tallets sidste 3 cifre (eksempel: 8 går op i 27 448, da 8 går op i 448). Man kan også sige fx 8 går op i et tal, hvis 4 går op i halvdelen af tallet (eller hvis 2 går op i en fjerdedel af tallet, eller hvis 2 går op i tallet 3 gange, eller …)
9 går op i et tal, hvis 9 går op i tallets tværsum.
10 går op i et tal, hvis tallet ender på 0 (nul).

DEL 4

A Tallet er 16 (2^4).

B Elevernes egne talgåder.



MÅL OG FAGLIGT INDHOLD

Eleverne skal på disse sider arbejde med at skrive meget små og meget store tal ved hjælp af eksponentiel notation. I den sammenhæng præsenteres de for begreberne eksponent og rod.

Eleverne har ikke tidligere arbejdet med eksponentiel notation, hvorfor der i de efterfølgende opgaver og aktiviteten er fokus på, at eleverne omskriver meget store og meget små tal til eksponentiel notation, så de oplever, at tallene bliver mere overskuelige.

MATERIALER

- A3-papir
- Digitalt værktøj, regneark

FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

TEORI: STORE TAL OG SMÅ TAL MED EKSPONENTIEL NOTATION

I teoriboksen er beskrevet, hvordan man kan omskrive meget store og meget små tal til eksponentiel notation. Dvs. at tallene bliver omskrevet vha. potenser af 10. Vær fx opmærksom på, at der både er tale om positive og negative eksponenter.

Da det er ny viden for eleverne, kan det være en god idé, at lade eleverne parvis gennemgå indholdet i teorirammen først, og derefter samle op fælles i klassen. Opgave 22 kan fx indgå som en del af den fælles gennemgang.

Det kan nævnes for eleverne, at denne skrivemåde med eksponentiel notation nogle gange optræder under betegnelsen "videnskabelig skrivemåde" (efter engelsk: Scientific notation).

Lad eleverne undersøge, hvordan de skriver med potenser på lommeregneren. Det er forskelligt, hvordan "potens-tasten" ser ud, men på de fleste lommeregnere vil der på tasten enten være tegnet y^x eller ^.

OPGAVE 22

A Tallene skrevet med eksponentiel notation er:

$9{,}8 \cdot 10^3$
$1{,}95 \cdot 10^4$
$3{,}6 \cdot 10^7$
$8{,}84 \cdot 10^{11}$
$4 \cdot 10^{-3}$
$7 \cdot 10^0$
$1{,}5 \cdot 10^{-5}$

OPGAVE 23

B $3{,}0 \cdot 10^5$ km/s
C $1{,}8 \cdot 10^7$ km/min.
D $1{,}08 \cdot 10^9$ km

OPGAVE 24

A 2 700 000 000 km

OPGAVE 25

A $1{,}0 \cdot 10^{-5}$ g
B 0,000011 g

OPGAVE 26

A 227 920 000 km

B 149 600 000 km

C 78 320 000 km = $7{,}832 \cdot 10^7$ km.

AKTIVITET: MODEL AF SOLSYSTEMET

DEL 1

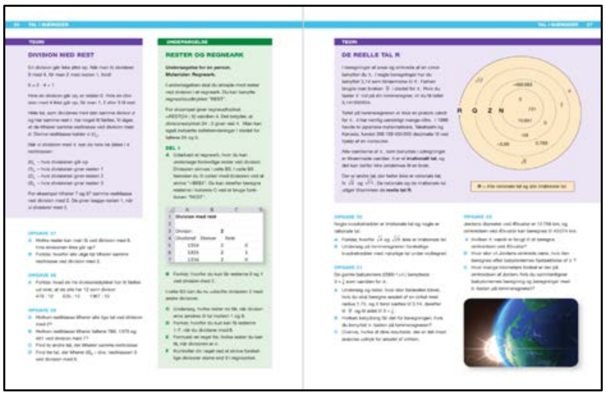
A Hvis modellen skal tegnes på et A3-papir, så kan den største længde ikke være mere end 42 cm, da det er længden på A3-papir. Modellen kan fx tegnes i længdeforholdet 1 : 1000 milliarder.
Dvs. 1 cm på modellen svarer til
15 000 000 000 000 cm = 150 000 000 km i universet.
I det længdeforhold vil Merkur ligge cirka 0, 4 cm fra Solen, og Neptun vil være placeret ca. 30 cm fra Solen.

B Eleverne udarbejder regneark.

C Elevernes egen tegning af model af solsystemet.

D Hvis 7. x skal lave en model af solsystemet i skolegården, så skal de først finde ud af i hvilket længdeforhold, de vil lave modellen.
De kan fx lave modellen i længdeforholdet
$1 : 2 \cdot 10^{10}$. Det betyder, at 1 cm i modellen svarer til 200 000 km i universet.
I det længdeforhold vil Merkur, der er tættest på Solen, være placeret cirka 2,9 m fra Solen, og Neptun, der er længst væk, være placeret ca. 225 m fra Solen. Det vil sige, at eleverne i dette længdeforhold skal bruge et område, der er min. 225 m langt. Hvis det ikke er muligt, så må længdeforholdet ændres til fx $1 : 4 \cdot 10^{10}$. I dette længdeforhold vil Solens diameter være ca. 7 cm, Merkurs 0,02 cm og Neptuns ca. 0,24 cm.

En udfordring til eleverne kan være, at lade dem finde et område på/nær skolen, og derefter finde et længdeforhold, i hvilket det vil være muligt at lave en stor model af solsystemet.



MÅL OG FAGLIGT INDHOLD

Eleverne fortsætter på den første side med at undersøge tallene og deres egenskaber indenfor mængden af hele tal Z, hvor de undersøger division med rest.

Derefter bliver de irrationale tal og mængden af reelle tal præsenteret, og eleverne arbejder i de efterfølgende opgaver med bl.a. tallet π.

Eleverne har på mellemtrinnet arbejdet med division med rest, hvorfor begrebet "rest" ikke er nyt for dem, men de har ikke tidligere arbejdet systematisk og undersøgende med "rester".

Det er første gang, eleverne møder begreberne irrationale tal og reelle tal. De kender π fra mellemtrinnet, hvor de har arbejdet med π i forbindelse med beregning af areal og omkreds i cirklen. Set i relation til talmængderne skal eleverne erfare, at der igen er brug for flere tal end de rationale tal, og det er nødvendigt at udvide talmængderne til de reelle tal.

MATERIALER

- Digitalt værktøj, regneark

FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

TEORI: DIVISION MED REST

Som nævnt kender eleverne til begrebet "rest", hvorfor det nye for eleverne er den notationsform, hvormed en division med rest kan beskrives. Lad fx eleverne arbejde parvis med indholdet i teoriboksen. De kan fx lave små opgaver til et andet makkerpar, hvor de i opgaverne bruger begreberne "rest" og "restklasse" og tilhørende notationsform.

OPGAVE 27

A Ved division med 6 kan man (hvis divisionen ikke går op) få de *principale rester* 1, 2, 3, 4 og 5.

B Alle ulige tal giver resten 1 ved division med 2.

OPGAVE 28

A De giver alle resten 11 ved division med 12.

OPGAVE 29

A Restklassen $(0)_2$

B Alle tallene tilhører restklassen $(5)_7$

C Også 12 og 19 tilhører restklasen $(5)_7$

D Tallene 5, 14, 23 og 32 tilhører $(5)_9$

Når vi kun regner med principale rester (rester som er mindre end divisor) vil resten 5 ved division med 4 bevirke, at 4 går op "en ekstra gang" i dividenden, og derved giver den principale rest 1.
I denne sammenhæng giver $(5)_4$ derfor ingen mening. I videregående matematik er $(5)_4$ derimod veldefineret – det er den samme restklasse som $(1)_4$. Med andre ord: De tal, der kan give resten 5 ved division med 4, er nøjagtig de samme tal, som de tal, der giver *den principale rest* 1 ved division med 4.

UNDERSØGELSE: RESTER OG REGNEARK

DEL 1

A Elevens eget regneark.

B Hvis der havde været rest 2 eller højere, så ville det betyde, at 2 ville gå mindst én gang mere op i tallet, og dermed ville det være rest 0 eller 1.

C Elevundersøgelse. Mulige principale rester ved division med:

2: 0 og 1

3: 0, 1 og 2

4: 0, 1, 2 og 3

5: 0, 1, 2, 3 og 4

6: 0, 1, 2, 3, 4 og 5

7: 0, 1, 2, 3, 4, 5 og 6

D Det er kun muligt at får resterne 1-7 ved division med 8, da rester lig med eller større end 8 betyder, at 8 vil gå mindst en gang mere i tallet, og resten vil være 0-7.

E Mulige principale rester ved division med *n*: 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$.

F Elevkontrol af regel.

Eleverne kan diskutere deres resultater parvis eller i mindre grupper, og de kan ligeledes tale om, hvordan (eller om) de har brugt regnearket i arbejdet med undersøgelsen.
Der vil sikkert være nogle elever, der ikke har brug for et regneark til at løse de enkelte opgaver, men det kan alligevel være relevant at udarbejde det, da det dels udvider deres kendskab til forskellige funktioner i regnearket, og dels styrker deres hjælpemiddelkompetence.

TEORI: DE REELLE TAL R

I teoriboksen præsenteres og beskrives mængden af reelle tal **R**, der kan beskrives som alle rationale tal og alle irrationale tal.

Et irrationalt tal er et tal, der *ikke* er rationalt. Dvs. et tal, der ikke kan skrives som en brøk eller et helt tal. Et irrationalt tal kan altså *ikke* omskrives til hverken et endeligt decimaltal eller et periodisk decimaltal.

Eleverne kender allerede det irrationale tal π, og i teoriboksen er $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{11}$ og $\sqrt{17}$ andre eksempler på irrationale tal.

OPGAVE 30

A Tallene $\sqrt{4}$ og $\sqrt{25}$ er rationale, fordi 4 og 25 er kvadrattal.

B Elevens lommeregnerundersøgelse.

Der kan være elever, der oplever, at deres lommeregner bibeholder kvadratroden som resultat, fx $\sqrt{6} = \sqrt{6}$, og ikke skriver resultatet med et decimaltal. Det kan ændres. På nogle lommeregnere gøres det ved at trykke "mode" og vælge "classic" i stedet for "mathprint". Men lad eleverne undersøge, hvordan de ændrer det på deres lommeregner, så de er bekendt med funktionen.

OPGAVE 31

A π-tilnærmelsen 3,14 giver A = 9,61625.
π-tilnærmelsen $\frac{22}{7}$ giver A = 9,62500.
π-tilnærmelsen $(3 + \frac{1}{8})$ giver A = 9,57031.

B π-tasten på lommeregneren giver A = 9,6211275...

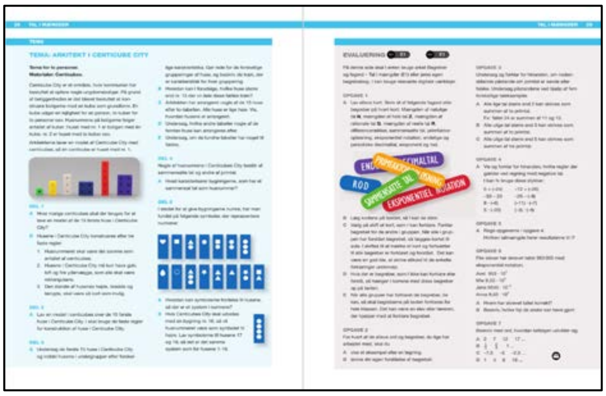
C π-tasten giver det mest præcise tal.

OPGAVE 32

A Den anvendte π-værdi er $\frac{40074}{12756} \approx 3{,}1415804\ldots$

B Jordens omkreds er selvfølgelig den samme, uanset hvilke π-tilnærmelse, man anvender, men *beregningsresultaterne* varierer. Ved brug af babyloniernes tilnærmelsesværdi fås omkredsen til 39.862,5 km.

C Lommeregneren π-tast giver O = 40.074,15589 km, dvs. forskellen er 211,65589 km.



MÅL OG FAGLIGT INDHOLD

På dette opslag skal eleverne på den første side arbejde med temaet: Arkitekt i Centicube City, og på den anden side skal de arbejde med evaluering af kapitlet.

MATERIALER

- Centicubes

PRINTARK

- E1 Begreber og fagord – Tal i mængder

FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

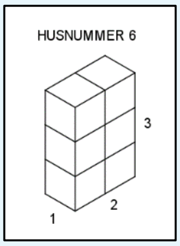
TEMA: ARKITEKT I CENTICUBE CITY

DEL 1

A Der skal bruges 120 centicubes.

DEL 2

B Elevernes modeller over de første 15 huse. Dimensionerne er angivet herunder ud fra dette system: *l* x *b* x *h*. Fx hus nummer 6 med dimensionerne 1 x 2 x 3:



Husnummer	Dimensioner
1	1 x 1 x 1
2	1 x 1 x 2
3	1 x 1 x 3
4	1 x 2 x 2
5	1 x 1 x 5
6	1 x 2 x 3
7	1 x 1 x 7
8	2 x 2 x 2
9	1 x 3 x 3
10	1 x 2 x 5
11	1 x 1 x 11
12	1 x 3 x 4
13	1 x 1 x 13
14	1 x 2 x 7
15	1 x 3 x 5

DEL 3

C Elevernes inddeling af husene i undergrupper. Mange inddelinger er formentlig mulige, men den, der i en vis forstand "ligger lige for", er inddelingen i huse hvis dimension er $1 \times 1 \times n$, hvor n er husets nummer (dvs. primtallene samt hus nr. 1) i den ene gruppe og resten (de sammensatte tal) i den anden gruppe. De første er så karakteriseret ved at have (mindst) to 1-taller i dimensionen, de andre ved at have højst ét 1-tal i dimensionen. Resten af opgaven er her besvaret ud fra denne inddeling.

D Huse med primtalsnummer p har dimensionen $1 \times 1 \times p$. Huse med sammensatte tal som nummer har mindst to dimensioner større end 1.

E Der er tale om husene med lige numre. Da alle husene er lige høje, og da den eneste sikre fælles divisor i husnummeret er 2, må husene være 2 høje. Husene er arrangeret som hus nummer 2, 4, 6, 8, 10, 12 og 14 i spørgsmål A med 2 som højden af huset.

F Andre tabeller kan også bruges. Huse arrangeret efter 3-tabellen vil 3 som husets højde.

G Elevundersøgelse.

DEL 4

A Bygninger med et sammensat tal som husnummer har højst én dimension (længde, bredde, højde) der har målet 1.

DEL 5

A Nu er eleverne sporet ind på primtal og sammensatte tal, så man kan undersøge, om ikke symbolerne kan repræsentere tallenes primtalsopløsning. Det ville passe godt med symbolet for nr. 16 med fire cirkelskiver, hvis cirkelskiven står for 2, idet 16 = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$.
Tallene fra 1 til 15 indeholder 6 primtal samt 1-tallet. Der skal derfor være 7 symboler, der optræder alene. Det er der også: Hjerte, kvadrat, cirkelskive, dråbe, cirkelperiferi, stjerne og trekant.
Da hjertet, dråben og cirkelperiferien kun optræder én gang, må disse symbolisere 1 eller primtal, der kun optræder ét sted i primtalsopløsningen af tallene fra 1 til 15 (nemlig 11 og 13). Der er i denne sammenhæng frit valg, så her er valgt cirkelperiferien som 1, hjertet som 11 og dråben som 13. Ved at se på primtalsopløsningen af tallene 4, 6, 8, 9, 10 12 og 14 og sammenligne med symbolerne får man følgende fordeling af symboler på husene:

Husnummer	Symbol
1	
2	
3	
$4 = 2^2$	
5	
$6 = 2 \cdot 3$	
7	
$8 = 2^3$	
$9 = 3^2$	
$10 = 2 \cdot 5$	
11	
$12 = 2^2 \cdot 3$	
13	
$14 = 2 \cdot 7$	
$15 = 3 \cdot 5$	

B Da 17 er et primtal, skal der opfindes et nyt symbol for 17. Her er frit valg på alle hylder, blot man holder sig fra de allerede brugte symboler.
Da primtalsopløsningen af 18 er $2 \cdot 3^2$, skal skiltet på hus nr. 18 bestå af en cirkelskive og to trekanter.

Der mange delundersøgelser og opgaver i temaet, og det kan være en god idé, at samle fælles op i klassen undervejs, fx efter del 2 og 4. I flere af opgaverne er det nødvendigt, at eleverne har forstået og besvaret de tidligere opgaver korrekt. Alternativ kan der dannes mindre grupper med 2-3 makkerpar, som løbende taler sammen om deres besvarelser.

EVALUERING

Eleverne skal på denne side evaluere de mål, fagord og begreber, de har arbejdet med gennem kapitlet.

DEL 1

A – E Elevaktivitet. Eleverne forklarer betydningen af de begreber, de har lært om.

DEL 2

A – B Elevaktivitet. Eleverne viser eksempler på og skriver deres egen forståelse af de begreber, de har lært om.

DEL 3

Eleverne skal (ved hjælp af 5 taleksempler) undersøge om nogle påstande er sande eller falske. Dette skal forstås således:
Hvis en påstand er sand, er 5 tilfælde, hvor den passer, selvfølgelig ikke et bevis. Man kan altså ikke vide, om påstanden er sand, selv om den passer på 5 eksempler

– men man har på den anden side heller ikke vist, at den *ikke* er sand.
Hvis en påstand er falsk, er et enkelt modeksempel nok. Finder man et sådant, er det unødvendigt at prøve med flere taleksempler – også selv om, man endnu ikke har prøvet 5.

A De fem taleksempler kunne være:
$4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 5 + 5$ og $12 = 5 + 7$
Det garanterer ikke selvfølgelig ikke påstandens sandhed. Påstanden kaldes Goldbachs formodning (efter Christian Goldbach; preussisk matematiker; 1690-1764). De fleste (formentlig alle) tror, den er sand, men den er stadig ikke bevist (men gælder for alle lige tal mindre end $4 \cdot 10^{14}$ - efterprøvet pr. computer). Der venter den, der beviser (eller modbeviser) påstanden evig berømmelse i matematikerkredse.

B Eksempler (vi prøver fra en ende af):
$5 = 2 + 3$
$7 = 2 + 5$
$9 = 2 + 7$
11? UPS! Der knækker filmen! 11 kan *ikke* skrives som sum af to primtal, så påstanden er falsk.

C Eksempler (igen fra en ende af):
$7 = 2 + 2 + 3$
$11 = 3 + 3 + 5$
$13 = 3 + 3 + 7$
$17 = 3 + 3 + 11$
$19 = 3 + 3 + 13$
Men heller ikke her garanterer de fem eksempler, at påstanden er sand. Påstanden kaldes Goldbachs svage formodning, og er heller ikke bevist. Det forlyder på, at man er tæt på et bevis. Bemærk i øvrigt, at da ethvert ulige tal større end 3 kan skrives som 3 + et lige tal, vil Goldbachs svage formodning (C) være sand, hvis Goldbachs formodning (A) er det.

DEL 4

A – D Elevernes egne forklaringer.

DEL 5

A Hvad er den *mindste* talmængde, som resultaterne tilhører (de er jo alle reelle tal).

-19 (Z)	-39 (Z)
-56 (Z)	-17 (Z)
-48 (Z)	77 (N)
$-\frac{1}{4}$ (Q)	$\frac{1}{3}$ (Q)

DEL 6

A Mie har som den eneste skrevet tallet korrekt i eksponentiel notation.

B Axel: Tallet før tier-potensen skal ligge mellem 1 og 10.
Jens: Tallet før tier-potensen ligger ikke mellem 1 og 10, og tier-eksponenten er forkert.
Anna: Tier-eksponenten er forkert.

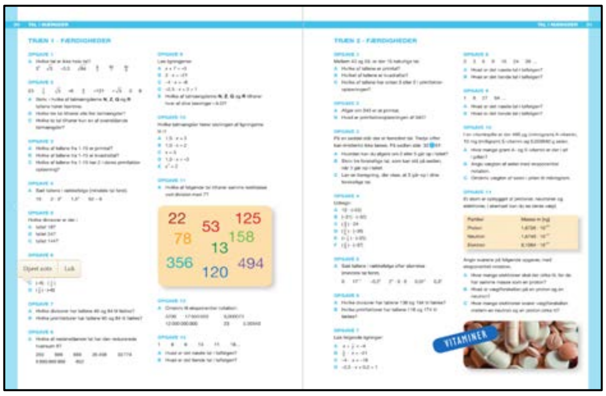
DEL 7

A Næste led fås ved at addere 5.

B Næste led fås ved at addere $\frac{1}{3}$.

C Næste led fås ved at addere 2,5.

D Dette er rækken af kvadrattal.
Tal nr. n er altså n^2. Man kan også sige, at tal nr. n kommer af tal nr. $n - 1$ ved at addere $2n - 1$.



MÅL OG FAGLIGT INDHOLD

På dette opslag skal eleverne arbejde med færdighedsopgaver på to niveauer, der handler om kapitlets emne.

FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

TRÆN 1 • FÆRDIGHEDER

OPGAVE 1

A Tallene $\sqrt{3}$, $-3{,}5$ og $\frac{84}{8}$ er ikke hele tal.

OPGAVE 2

I første oplag af *MULTI 7* er punkt B: "Hvilke tre tal tilhører alle fire talmængder?". Der er imidlertid kun to tal, der tilhører alle fire talmængder.

A N: $\frac{4}{4}$(= 1) og 8 Z: -6 og 0
Q: $\frac{1}{2}$ R: $-\sqrt{5}$ og $\sqrt{5}$

B $\frac{4}{4}$ og 8.

C $-\sqrt{5}$ og $\sqrt{5}$

OPGAVE 3

A Primtal fra 1 til 15: 2, 3, 5, 7, 11 og 13.

B Kvadrattal fra 1 til 15: 1, 4 og 9.

C Tallene 2, 4, 6, 8, 10, 12 og 14 har 2 i deres primtalsopløsning.

OPGAVE 4

A Rækkefølgen er: $1{,}5^3$ (3,375), $2 \cdot 3^2$ (18), 19, 52 – 8 (44)

OPGAVE 5

A Divisorerne i 18 er: 1, 2, 3, 6, 9 og 18.

B Divisorerne i 24 er: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 og 24.

C Divisorerne i 144 er: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72 og 144.

OPGAVE 6

A -12

B 12

C -3

D -3

OPGAVE 7

A Tallene 49 og 84 har divisorerne 1 og 7 til fælles.

B Tallene 90 og 84 har primfaktorerne 2 og 3 til fælles.

OPGAVE 8

A Disse tal har den reducerede tværsum 8:
260, 989, 9 999 999 998 og 602.

OPGAVE 9

A $x = -10$

B $x = -10{,}5$

C $x = 2$

D $x = 0{,}8$

E Den *mindste* talmængde, resultaterne tilhører er:
N: C Z: A Q: B og D
Alle resultaterne tilhører Q og R.

OPGAVE 10

De mindste talmængder, løsningerne hører til i, er:

A N ($x = 2$)

B Q ($x = \frac{4}{3}$)

C N ($x = 3$)

D Z ($x = -2$)

E R ($x = \pm\sqrt{2}$)

OPGAVE 11

A Tallene 22, 73 og 120 tilhører restklassen $(1)_7$
Tallene 53, 128 og 494 tilhører restklassen $(4)_7$
Tallene 13, 125 og 356 tilhører restklassen $(6)_7$

OPGAVE 12

A $3{,}7 \cdot 10^3$
$1{,}76 \cdot 10^7$
$7{,}3 \cdot 10^{-5}$
$1{,}2 \cdot 10^{10}$
$2{,}3 \cdot 10^1$
$3{,}43 \cdot 10^{-3}$

OPGAVE 13

A Næste tal er 16.

B Tal nr. 10 er 28.

Systemet er, at der skiftevis lægges 7 til og trækkes 2 fra.

TRÆN 2 • FÆRDIGHEDER

OPGAVE 1

A Primtallene *mellem* 43 og 59 er 47 og 53.
B Kvadrattallet mellem 43 og 59 er 49 (7^2).
C Tallene 45, 48, 50, 51, 54, 55 og 57 har enten 3 eller 5 (eller begge) i deres primfaktoropløsning.

OPGAVE 2

A Nej, 343 er ikke et primtal.
B $343 = 7^3$.

OPGAVE 3

A Hverken 2 eller 5 går op, da hverken 2 eller 5 går op i sidste ciffer.
B Der kan stå et af cifrene 0, 3, 6 eller 9.
C Find tallets tværsum, og se, om 3 går op i tværsummen.

OPGAVE 4

A -660
B 992
C 16
D -14
E $6\frac{1}{4}$(6,25)
F $-14\frac{4}{5}$($-14{,}8$)

OPGAVE 5

A $-0{,}3^3$; 0 ; $0{,}01^4$; 17^{-1} ; $0{,}3^2$; $2^2 \cdot 3 \cdot 5$

OPGAVE 6

A De fælles divisorer for 138 og 184 er 1, 2 og 23.
B De fælles primfaktorer for 116 og 174 er 2 og 29.

OPGAVE 7

A $x = -4\frac{1}{7}$ ($-4{,}14285...$)
B $x = -28$
C $x = 4\frac{3}{4}$ (4,75)
D $x = -\frac{8}{25}$ ($-0{,}32$)

OPGAVE 8

A Næste tal er 63.
B Tal nr. 10 er 165.

Rækken er en slags Fibonacci-tal, der starter med to 3-taller, og hvor hvert tal derefter er summen af de to foregående.

OPGAVE 9

A Næste tal er 125.
B Tal nr. 10 er 1000.

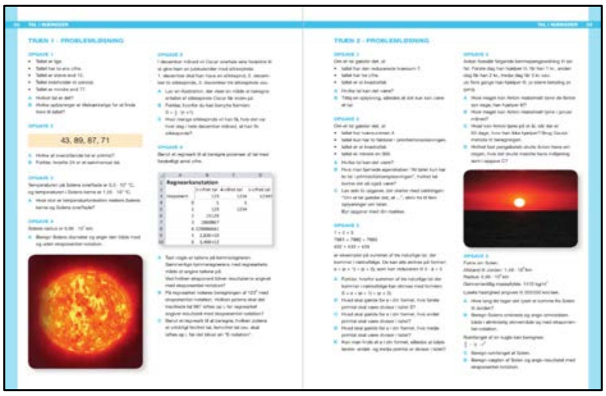
Rækken består af kubiktallene 1^3, 2^3, 3^3, ...

OPGAVE 10

A 0,0104 g
B $4{,}0 \cdot 10^{-5}$ g
C 40 µg

OPGAVE 11

A Ca. $1{,}84 \cdot 10^3$ elektroner.
B $2{,}5 \cdot 10^{-30}$ g.
C Ca. $3 \cdot 10^0$ elektroner.



MÅL OG FAGLIGT INDHOLD

På dette opslag skal eleverne arbejde problemløsningsopgaver på to niveauer, der handler om kapitlets emne.

FACITLISTE OG UDDYBENDE VEJLEDNING

TRÆN 1 • PROBLEMLØSNING

OPGAVE 1

A Tallet er 66.

B Det vil være tilstrækkeligt at vide, at

- tallet har to ens cifre.
- tallet indeholder et sekstal.
- tallet er større end 15.
- tallet er mindre end 77.

Oplysningen "tallet er større end 15" vil også være overflødig, hvis vi implicit går ud fra, at der er tale om et positivt tal.

OPGAVE 2

A Tallene 43, 89 og 71 er alle primtal.

B $24 = 2^3 \cdot 3$ – så 24 har andre divisorer end 1 og 24, og er derfor et sammensat tal.

OPGAVE 3

A 15 494 500 °C

OPGAVE 4

A Solens diameter *d* skrevet med eksponentiel notation:
$d = 1{,}392 \cdot 10^6$ km.
Solens diameter *d* skrevet uden eksponentiel notation:
$d = 1\ 392\ 000$ km.

OPGAVE 5

A Elevens egen illustration.

B Fordi formlen giver summen af de første *n* naturlige tal. Hvis *n* sættes lig med 24 giver det antallet af slikkepinde, som Oscar får inden jul.

C I alt 496 slikkepinde.

OPGAVE 6

Elevens arbejde med eget regneark.

A Den eksponent, der giver anledning til eksponentiel notation afhænger af rodens størrelse. Sædvanligvis vil det dog være lommeregneren, der først går over til eksponentiel notation.

B Når 987 opløftes til 4. potens angives resultatet med eksponentiel notation. Bemærk, at i teksten hævdes det implicit, at 123^5 *ikke* skrives med eksponentiel notation. I det afbildede regneark skrives 123^5 dog med eksponentiel notation. Det skyldes imidlertid, at kolonne B ikke er bred nok til at indeholde 123^5 med alle cifre i sædvanlig notation ($123^5 = 28.153.056.843$).

C Svarene følger af dette regneark, hvor det mindste og det største 4-cifrede tal er opløftet til potenser osv.

	A	B	C	D	E
1		Rod			
2	Eksponent		2	3	4
3	4 cifre	1000	1000000	1000000000	1E+12
4		9999	99980001	9,997E+11	
5					
6	5 cifre	10000	100000000	1E+12	
7		99999	9999800001	9,9997E+14	
8					

TRÆN 2 • PROBLEMLØSNING

OPGAVE 1

A De trecifrede kvadrattal, der har den reducerede tværsum 7, er 169, 196, 324, 484, 529 og 961.

B For eksempel: Tallet er mindre end 180 (eller større end 600, eller ligger mellem 200 og 400, eller ...)

OPGAVE 2

A Da tallet har tværsummen 4 (Bemærk: *Ikke* den reducerede tværsum 4) *og* er mindre end 300, kan der kun være tale om tallene 4, 13, 22, 31, 40, 121, 130 og 220.
De eneste kvadrattal blandt disse tal er 4 (2^2) og 121 (11^2).

B At fjerne oplysningen om antallet af faktorer i primfaktoropløsningen giver ikke ekstra kandidater. Oplysningen er overflødig, da de eneste kandidater er kvadrater på primtal, og sådanne kvadrater vil altid have netop to primfaktorer.

C Eleverne egne opgaver.

OPGAVE 3

A Elevernes egen forklaring.

I punkt B-E forventes eleven ikke at gøre overvejelser som beskrevet herunder. En rimelig arbejdsmetode vil være at efterprøve udsagnene med en masse a-værdier og efterhånden komme til en overbevisning om kravet til a.

B Tallet a skal være ulige. Derved bliver S en sum af to ulige og et lige tal – altså lige, dvs. 2 (første primtal) går op. Hvis a er lige, får vi en sum af to lige og et ulige tal, dvs. summen bliver ulige, og 2 går derfor ikke op.

C Andet primtal går altid om i S.
Andet primtal er 3. Vi kan omskrive tallet S således:
$S = a + (a + 1) + (a + 2) = a + a + 1 + a + 2 = 3a + 3$
$= 3 \cdot (a + 1)$
Heraf ses, at 3 går op i S uanset værdien af a.

D Sidste ciffer i tallet a skal være 4 eller 9.
Tredje primtal er 5. Det går op i et tal, hvis tallet ender på 0 eller 5. Hvis $3a + 3$ skal ende på 0 eller 5, skal $3a$ ende på 7 eller 2. Der er uendelig mange muligheder:
$3a$ ender på 7, hvis:
$a = 9, 19, 29, 39, \ldots$
$3a$ ender på 2, hvis:
$a = 4, 14, 24, 34, \ldots$

E Ja, hvis sidste ciffer i a er 9 ender $3a + 3$ på 0, og både 2 og 5 går op. Tallet 3 går altid op uanset a-værdien.

OPGAVE 4

A 28 kr.

B 496 kr. Der er 31 dage i januar.

I punkt C og D går vi ud fra, at det år, der er tale om, har 365 dage, og altså *ikke* er et skudår.

C 45.753 kr.

D Hvis "om dagen" betyder "pr. dag i året" får man selvfølgelig et andet resultat, end hvis "om dagen" betyder "pr. arbejdsdag". Her er resultatet for begge tolkninger:
Pr. dag i året: 125 kr. og 35 øre.
Pr. arbejdsdag: 151 kr. og 50 øre.

OPGAVE 5

A 8,31 minutter (8 minutter og 19 sekunder)

B Solens omkreds er $1{,}392 \cdot 10^6$ km.

C Solens rumfang er $V = 1{,}412 \cdot 10^{18}$ km^3.

D Solens masse er $m = 1{,}991 \cdot 10^{30}$ kg.