

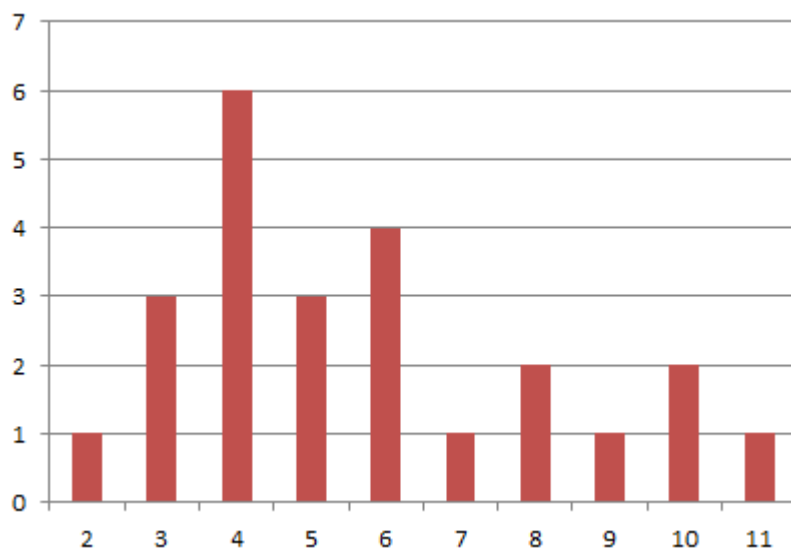
FACIT SIDE 154-155

Opgave 1

A.

Data (x)	$h(x)$	$f(x)$
2	1	0,042
3	3	0,125
4	6	0,25
5	3	0,125
6	4	0,16
7	1	0,042
8	2	0,0833
9	1	0,042
10	2	0,0833
11	1	0,042

B.



C.

Diagrammet (et søjlediagram) er lavet ud fra hyppigheden, da det giver et godt billede af fordelingen. For eksempel fremtræder størsteværdi, mindsteværdi og typetal klart, ligesom variationsbredden $9 (11 - 2)$ er nem at beregne.

Opgave 2

A. $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

B. $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

C. $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

**Opgave 3**

- A. Når det, man lægger mærke til ved hvert kast, er *antallet* af plat, er der kun tre udfald: 0 (nul) plat, 1 plat og 2 plat.
- B. Elevens forventning til de tre udfald.
Mange vil instinktivt mene, at alle udfald er lige sandsynlige og forvente frekvensen $33\frac{1}{3}\%$ for hvert udfald. Det rigtige er imidlertid

Udfald:	0 plat	1 plat	2 plat
Forventet frekvens:	25 %	50 %	25 %

idet udfaldet "1 plat" kan forekomme på to måder: (den ene mønt plat, den anden mønt krone) eller (den ene mønt krone, den anden mønt plat).

Elever, der først gætter på en ligefordeling, vil blive udfordret af spørgsmål C og D.

- C. Eleveksperiment.
D. Sammenligning af eksperimentet med forventningen.

Man kan evt. se på hele klassens resultater under ét. Det vil så være klart, at ligefordelingen ikke er den rigtige.

FACIT SIDE 156-157

Opgave 4

Elevbeskrivelse af eksperimenter, der opfylder de krævede betingelser. Her er nogle eksempler – men mange andre er naturligvis mulige.

- Kast med en almindelig sekssidet terning – noter øjentallet.
- Træk et spillekort – noter, om det er ey billedkort.
- Kast med to sekssidede terninger – noter summen af øjnene.
- Kast med en mønt efterfulgt af kast med en sekssidet terning efterfulgt af kast med en tisedet terning – noter udfald af typen (plat, 3, 8).

Opgave 5

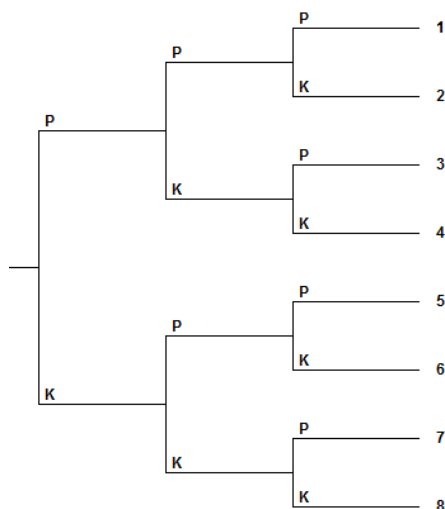
- Eleven skriver tre eksempler på festudvalg fx (Alma, Daniel), (Alma, Eigil) og (Alma, Felix).
- Der er 9 kombinationsmuligheder (skal vises med en tællemodel):

	Daniel	Eigil	Felix
Alma	(A, D)	(A, E)	(A, F)
Beate	(B, D)	(B, E)	(B, F)
Clara	(C, D)	(C, E)	(C, F)

- $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
- $\frac{1}{3}$. Der er 15 forskellige udvalg – heraf indgår Janus i de 5.

Opgave 6

- Udfaldsrummet U består af 8 udfald.



$U = \{(p, p, p), (p, p, k), (p, k, p), (p, k, k), (k, p, p), (k, p, k), (k, k, p), (k, k, k)\}$
 Alle disse udfald er lige sandsynlige.

- Falsk. Af tælletræet kan man se, at sandsynligheden for udfaldet (k, k, k) er $\frac{1}{8}$.
 Sandt (begge udfald forekommer netop én gang i tælletræet).
 Falsk. Begge udfald forekommer netop én gang i tælletræet, og de har derfor begge sandsynligheden $\frac{1}{8}$.



FACIT SIDE 158-159

Opgave 7

- A. Axel har $4 \cdot 6 = 24$ valgmuligheder.
 B. Liva har $6 + 4 = 10$ valgmuligheder.

Opgave 8

- A. Eleverne skriver to forslag til opgaver, der kan løses ved brug af additionsprincippet. Her er et par eksempler.
1. Louise skal vælge konfirmationstøj. Hun kan enten vælge en af tre kjoler eller hun kan vælge en af to dragter. Hvor mange valgmuligheder har Louise?
 2. Mads skal vælge én pakke LEGO. I butikken er der fire pakker med LEGO StarWars, to pakker med LEGO Chima og fem pakker med LEGO City. Hvor mange valgmuligheder har Mads?
- B. Eleverne skriver to forslag til opgaver, der kan løses ved brug af multiplikationsprincippet. Her er et par eksempler.
1. Johan skal ud og købe et nyt fodboldsæt bestående af 1 par shorts og 1 spillertrøje. Der er 4 forskellige par shorts og 3 forskellige spillertrøjer. Hvor mange valgmuligheder har Johan?
 2. Karla skal købe udstyr til sin cykel. Hun skal have ringeklokke, lås og lygter. Der er 4 forskellige ringeklokker, 5 forskellige låse og 2 forskellige slags lygter. Hvor mange valgmuligheder har Klara?
- C. Eleverne bytter opgaver, løser og diskuterer hinandens opgaver.

Opgave 9

- A. Den angivne rækkefølge af farvede kvadrater kan opnås på 6 forskellige måder.
 Se kommentaren efter facit til opgave 10.

Opgave 10

- A. Der er i alt 20 ruter, som danner ordet TREKANT.

Kommentar til opgave 9 og 10.

Både opgave 9 og opgave 10 drejer sig om at finde antallet af ruter fra øverste venstre kvadrat til nederste højre kvadrat i et kvadratnet, hvor man kun må bevæge sig mod højre og ned – ét skridt ad gangen. Et skridt er her en streg fra et kvadrat til et nabokvadrat – til højre eller ned.

For på denne måde at nå fra start til slut i et 3×3 -kvadrat skal der bruges 4 skridt. To af disse skridt skal gå mod højre, og to af dem skal gå nedad. Det er derimod ligegyldigt, hvilke to af de fire skridt, der går ned og hvilke, der går til højre. Så problemet kan også oversættes til :

Når du har fire tomme pladser:

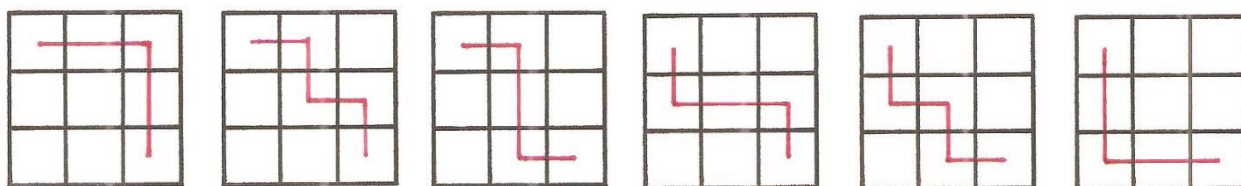
--	--	--	--

på hvor mange måder kan du så udfylde to af dem med et H (H for Højre)?

At udvælge to pladser ud af fire kan gøres på $K(4, 2) = 6$ måder. Men eleverne kender ikke noget til binomialkoefficienter, så de må eksperimentere sig frem:

H	H		
H		H	
H			H
	H	H	
	H		H
		H	H

De steder, hvor der ikke står et H, skal der så stå et N (N for Ned). Indholdet af tabellen herover (oppefra og ned) svarer da til disse ruter (fra venstre mod højre):



Tilsvarende kræves der i et 4×4 -kvadrat i alt 6 skridt, hvoraf de 3 skal gå mod højre. Antallet af ruter (og dermed antallet af måder hvorpå ordet TREKANT kan dannes) er derfor $K(6, 3) = 20$.

Det kan være vanskeligt for eleverne at finde dem alle, og specielt vanskeligt at være *sikker på*, at de har fundet dem alle. Om ønsket kan man derfor give opgaven en lidt anden karakter ved at formulere den således:

Der er i alt 20 forskellige måder, som ordet TREKANT kan dannes på.
Hvor mange af dem kan du finde?

Opgave 11

- Pernille kan have 24 forskellige koder ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$).
- Signe kan have 12 forskellige koder.

Opgave 12

- Der er $4 \cdot 3 = 12$ holdmuligheder.
- Nu er der $3 \cdot 5 = 15$ holdmuligheder.
- Elevforslag. Mulighederne (teoretisk) er: (2D, 10P), (4D, 5P), (5D, 4P) og (10D, 2P).

Opgave 13

- Elevforklaring ($5 \cdot 6 \cdot 4$).
- I alt $5 \cdot 6 \cdot 4 = 72$ sammensætninger.
- To elevbud. Antallet af discipliner i det tre afdelinger skal være hele tal med produktet 60.

Opgave 14

- For hver af terningens 6 flader skal der vælges mellem 2 farver. Terningen kan derfor males på $2^6 = 64$ forskellige måder (både-og-valg).
- For hver af terningens 4 flader skal der vælges mellem 3 farver. Det kan derfor gøres på $3^4 = 81$ forskellige måder.

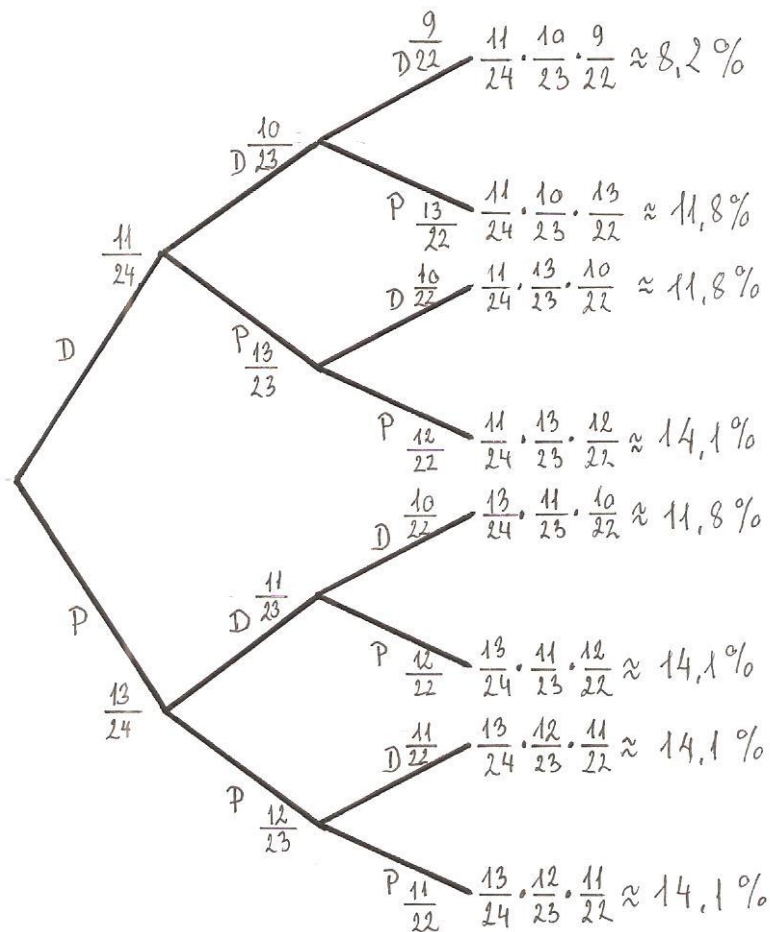
FACIT SIDE 160-161

Opgave 15

- A. Fordi $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$ giver samme resultat som $\frac{3}{9} \cdot \frac{4}{8}$.
- B. $P(\text{gul, gul}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$
- C. Fordi der er flere røde kugler end blå.
- D. Når man har taget 2 gule kugler, er der i alt 7 kugler tilbage, hvoraf de 2 er gule. Den søgte sandsynlighed er derfor $\frac{2}{7}$
- E. Der er 7 kugler tilbage, hvoraf 1 er rød. Sandsynligheden for at trække en rød er derfor $\frac{1}{7}$.
- F. Fordi der ikke er flere blå kugler i posen.

Opgave 16

- A. Chancetræ:

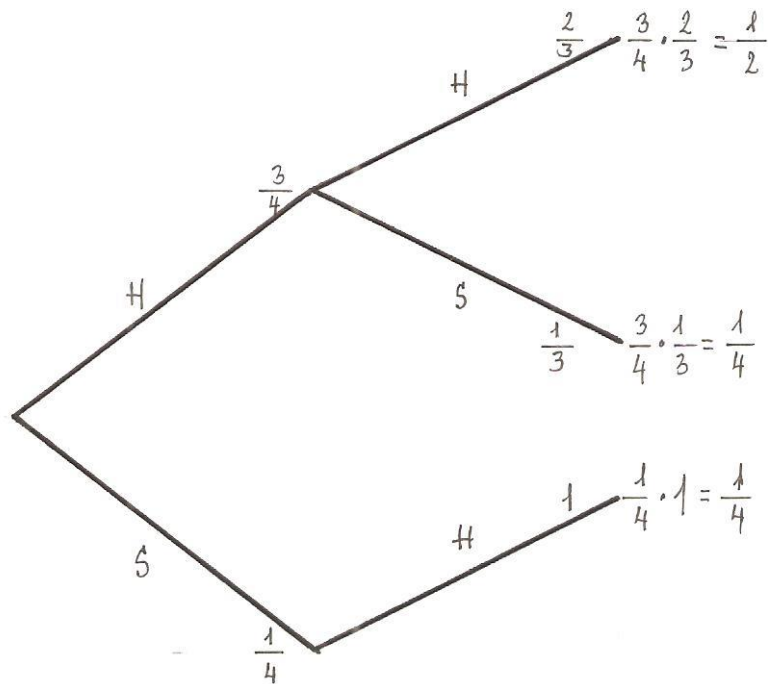


C. $\frac{13}{24} \cdot \frac{12}{23} \cdot \frac{11}{22} \approx 14,13\%$.

D. $\frac{11}{24} \cdot \frac{10}{23} \cdot \frac{9}{22} \approx 8,2\%$.

Opgave 17

A. Chancetræ:

B. Elevforklaring ($\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$).**Opgave 18**

A. $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

B. $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$.

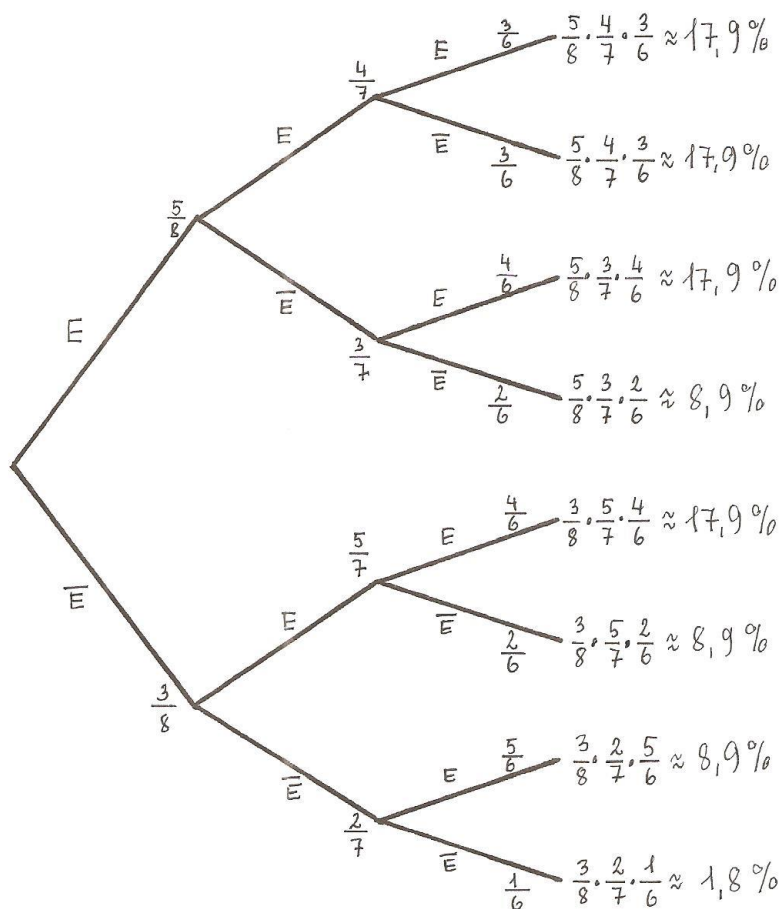
FACIT SIDE 162-163

Opgave 19

- A. Det er en ordnet stikprøve med tilbagelægning.
B. Eleven skriver 5 koder.

Opgave 20

- A. Stikprøven er uordnet og uden tilbagelægning.
B. I chancetræet herunder betegner E den hændelse, at den valgte CD er en Elvis-CD, mens \bar{E} betegner den hændelse, at den valgte CD *ikke* er en Elvis-CD.



- C. Af chancetræet kan man aflæse, at den søgte sandsynlighed er $\frac{5}{28} \approx 17,9\%$.
D. Af chancetræet aflæses, at sandsynligheden for "nul Elvis-CD'er" er $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{336}$.

Opgave 21

- A. Sandsynligheden for, at "Promised Land" *ikke* er med er $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$.
B. Sandsynligheden for, at begge "Promised Land"-CD'er er med er $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

Opgave 22

- A. Sandsynligheden for, at nøglen ikke passer, er $\frac{4}{5}$.

**Opgave 23**

- A. Det er lige meget, om en elev bliver trukket som nummer 1 eller nummer 2 – altså er stikprøven uordnet. Det er uden tilbagelægning, da gruppen skal bestå af to elever, og derfor kan den samme elev ikke trækkes flere gange.
- B. Morgenmadsgruppen kan sammensættes på 15 forskellige måder.
- C. Aftenmadsgruppen kan sammensættes på 6 forskellige måder.



FACIT SIDE 164-165

AKTIVITET. SANDSYNLIGHED OG SPIL

DEL 1

- A. Spilleren betaler i alt 200 kr. for at deltage i 100 spil.
- B. Spilleren vil vinde 25 spil.
- C. Spillerne får udbetalt $6 \cdot 25 = 150$ kr.
- D. Spilleren har tabt 50 kr.
- E. Spiludbyderen har vundet 50 kr.

DEL 2

- A. Hændelsen består af udfaldene 2, 3 og 5.
- B. Sandsynligheden for at spilleren vinder er $\frac{1}{2} = 50\%$.
- C. Hvis spillet skal være retfærdigt, skal odds være 2.
- D. Hvis 7. x skal tjene penge på spillet i det lange løb, skal odds være *mindre end 2*.

DEL 3

- A. Eleverne spiller spil 1.
- B. Sandsynligheden for at vinde i 2. spil er $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.
- C. Eleverne undersøger 2. spil.
- D. Eleverne undersøger eget spil.

DEL 4

- A. Vindersandsynligheden er $\frac{1}{4}$.
- B. Hvis spillet skal være retfærdigt, skal odds være 4.
- C. Hvis klassen skal tjene 300 kr., skal odds være 2,5.

DEL 5

- A. Spillerens gevinstchance er i virkeligheden $\frac{16}{36} = \frac{4}{9} \approx 44,4\%$.
- B. Det beløb, klassen kan tjene på 100 spil, afhænger selvfølgelig af indsatsens størrelse. Ved en indsats på 1 kr. kan man forvente at tjene ca. 33 kr. Skærmdump fra "Spil med odds (1)":



5			
6	Indsats pr. spil:	1	kr.
7			
8	Odds:	1,5	
9			
10	Sandsynlighed for at vinde:	0,4444	
11			
12	Det forventede antal spil:	100	
13			
14			
15	Spillerne får tilsammen udbetalt:	66,67	kr.
16			
17	Klassen tjener i alt:	33,33	kr.
18			

For hver krone, indsatsen sættes til, tjener klassen altså ca. 33 kr. på 100 spil.

Aktivitet slut

FACIT SIDE 166-167

Opgave 24

Teoretisk sandsynlighed kan besvare spørgsmålene i opgave A, C, D og G.

Opgave 25

- A. Den søgte sandsynlighed er $\frac{120}{7776}$.
- B. Påstanden er falsk.
- C. Påstanden er falsk.
- D. Påstanden er falsk.

Opgave 26

- A. Tælltabel:

	Spar knægt	Spar dame	Spar konge	Spar es
Hjerter knægt				
Hjerter dame				
Hjerter konge				
Hjerter es				

- B. Der er i alt 16 udfald.
- C. I 7 af de 16 udfald indgår mindst én knægt.
- D. Sandsynligheden for at trække et udfald med spar dame er $\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 25\%$.

Opgave 27

- A. Oskar har størst sandsynlighed for at vinde, idet der er 10 grønne cykler, men kun 8, der er sorte eller blå.
- B. Oskar har ikke ret. Der er 10 røde cykler, men der er også 10, der er blå eller gule, så de to sandsynligheder er lige store.

FACIT SIDE 170-171

Træn 1 FÆRDIGHEDER

Opgave 1

- A. $P(\text{blå}) = \frac{1}{10} = 10\%$.
- B. $P(\text{grøn eller hvid}) = \frac{3}{10} = 30\%$.
- C. $P(\text{ikke-gul}) = \frac{8}{10} = 80\%$.

Opgave 2

- A. Hvis stikprøven tages med tilbagelægning: $P(\text{to gule}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \approx 11,1\%$.
- B. Hvis stikprøven tages uden tilbagelægning: $P(\text{to gule}) = \frac{1}{12} \approx 8,3\%$.

Opgave 3

- A. På $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ måder.

Opgave 4

- A. $P(\text{es}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \approx 7,7\%$.
- B. $P(\text{rødt es}) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} = 50\%$.
- C. $P(\text{ikke-es}) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13} \approx 92,3\%$.
- D. $P(\text{billedkort}) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} \approx 23,1\%$.

Opgave 5

- A. Den statistiske sandsynlighed for rød efter disse 1000 kast er 20 %.
- B. Den statistiske sandsynlighed for blå efter disse 1000 kast er 40 %.

Opgave 6

Svarene afhænger af aflæsningen af stolpediagrammet, så en vis aflæsningsusikkerhed må forventes. Grundlaget for resultaterne herunder er følgende aflæsninger:

a: 50 (12,5 %), b: 20 (5 %), c: 140 (35 %), d: 50 (12,5 %), e: 20 (5 %) og f: 120 (30 %).

- A. 5 %.
- B. 12,25 %.

Opgave 7

- A. $P(\text{to piger}) = \frac{45}{276} = \frac{15}{92} \approx 16,3\%$.
- B. $P(\text{to drenge}) = \frac{91}{276} \approx 33,0\%$.

Opgave 8

- A. $P(\text{to ens}) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} = 12,5\%$.
- B. $P(\text{sum} = 16) = \frac{1}{64} \approx 1,6\%$.
- C. $P(\text{produkt} = 1) = \frac{1}{64} \approx 1,6\%$.

**Opgave 9**

Elevforslag til stikprøver.

Træn 2 FÆRDIGHEDER**Opgave 1**

- A. $P(\text{blå}) = \frac{2}{20} = 10\%$.
B. $P(\text{grøn eller sort}) = \frac{8}{20} = 40\%$.

Opgave 2

- A. $P(\text{tre eller seks}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$.
B. $P(\text{sum} = 9) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} = 12,5\%$.
C. $P(\text{produkt} = 18) = \frac{2}{64} = \frac{1}{32} \approx 3,1\%$.

Opgave 3

- A. De tre kan stille sig i kø på $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ forskellige måder.

Opgave 4

- A. $P(\text{to seksere}) = \frac{1}{144} \approx 0,69\%$.
B. $P(\text{tre seksere}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{480} \approx 0,21\%$.

Opgave 5

- A. Der findes $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 5000$ løbenumre til piger.

Opgave 6

- A. Når man tæller antallet af "krone" ved kast med tre mønter, er udfaldsrummet $U = \{0, 1, 2, 3\}$.
B. Vindersandsynligheden er $\frac{1}{8}$.

Opgave 7

- A. $P(A) = \frac{1}{3} = 33,3\%$.
B. $P(B) = \frac{1}{9} = 11,1\%$.
C. $P(C) = \frac{70}{117} \approx 59,8\%$.

FACIT SIDE 172-173

Træn 1 PROBLEMLØSNING

Opgave 1

- A. 504 lyn-serier.
- B. 15 120 basis-serier.

Opgave 2

- A. $P(a \text{ eller } b) = \frac{2}{3} \approx 66,7 \%$.
- B. $P(c) = \frac{1}{3} \approx 33,3 \%$.
- C. Elevtegning af chancetræ.
- D. $P(\text{rød } a \text{ og blå } b) = \frac{1}{9} \approx 11,1 \%$.

Opgave 3

- A. Der vil være $28^3 = 21.952$ forskellige ejerkoder.
- B. $10^3 = 1000$ ejerkoder.

Opgave 4

- A. Eleverne undersøger med et chancetræ, hvem der har ret (Lise).

Opgave 5

- A. Sandsynlighederne er fordelt således:

Gul	Blå	Rød	Grøn	Lilla
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Der gælder altså $P(\text{blå}) = \frac{3}{8}$.

- B. $P(2 \text{ gange rød}) = \frac{1}{64}$.
- C. At bilen peger på grønt felt to gange i træk.

Opgave 6

I denne opgave går vi ud fra, at w tæller som et bogstav. Så er der 29 bogstaver i det danske alfabet, hvoraf 5 (I, Q, Æ, Ø og Å) ikke bruges. Tilbage er 24 bogstaver.

- A. $10^5 = 10.000$ mulige nummerplader med MD.
- B. $24 \cdot 10^5 = 2.400.000$ mulige nummerplader med M som første bogstav.
- C. $24^2 = 576$.
- D. $24^2 \cdot 10^5 = 57.600.000$.

Træn 2 PROBLEMLØSNING

Opgave 1

- A. $10^5 = 100\,000$ basis-serier.
 B. $10^3 = 1000$ basis-serier.
 C. Der er $1 \cdot 10^4$ basis-serier, som kun indeholder "The Klap" én gang, så sandsynligheden for, at en tilfældig valgt serie opfylder dette, er $\frac{1 \cdot 10^4}{10^5} = \frac{1}{10} = 10\%$.

Opgave 2

- A. $P(\text{brøk} = 1) = \frac{1}{10} = 10\%$.
 B. $P(\text{brøk} < \frac{1}{2}) = \frac{2}{3} \approx 66,7\%$.
 C. 15 brøker bliver større end $\frac{1}{2}$.
 D. $P(\text{brøk} = \frac{6}{5}) = \frac{1}{60} \approx 1,7\%$.
 E. $P(\text{brøk} > 1) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} = 25\%$.

Opgave 3

- A. Der er i alt $10^4 = 10.000$ kombinationer.
 B. Yrsa kan vælge mellem 100 kombinationer.
 C. Ole kan risikere at skulle bruge $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ forsøg.

Opgave 4

- A. Hvis Tobias ikke skal over 21, skal han trække et kort med værdi mindre end 5. Der er der 15 af i bunken: fire esser, fire 2'ere, tre 3'ere og fire 4'ere. Men der er flere kort med en værdi på 5 eller derover (i alt 22 hvis vi tillægger esserne værdien 1), så det vil være fornuftigt af Tobias at stoppe.
 B. Der er i alt 37 kort tilbage at vælge mellem. Hvis vi tillægger esserne værdien 1, vil 15 af disse give en værdi mindre end eller lig med 21, så den søgte sandsynlighed er

$$P(\text{sum} \leq 21) = \frac{15}{37} \approx 40,5\%$$

 C. $P(\text{sum} > 21) = 1 - \frac{15}{37} = \frac{22}{37} \approx 59,5\%$.
 D. Af de tilbageværende 37 kort er der 7 kort (fire 9'ere og tre 10'ere), der bringer Abdis sum over 21, men der er 30 kort, som vil resultere i en sum mindre end eller lig med 21 ($es = 1$). Så man vil nok råde Abdi til at trække et kort mere.
 E. $P(\text{sum} \leq 21) = \frac{30}{37} \approx 81,2\%$.

Opgave 5

- A. Af de 25 elever er der 10, der cykler i skole, så sandsynligheden er $\frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 40\%$.
 B. Tre elever fra klassen kan vælges på $K(25, 3) = 2.300$ måder. Der er kun 3 elever som kører med bus, så sandsynligheden for, at netop disse tre bliver valgt er $\frac{1}{2300} = 0,043\%$.
 Bemærk: Eleverne kender ikke binomialkoefficienterne (her $K(25, 3)$) og skal derfor hjælpes til at finde antallet 2.300 – specielt til at indse, at $25 \cdot 24 \cdot 23$ ikke er antallet af mulige udfald.
 C. Der er i alt 10 elever af de 25 i klassen, som kører med bus eller bliver kørt i skole. Sandsynligheden for, at en af dem bliver valgt, er derfor $\frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 40\%$.