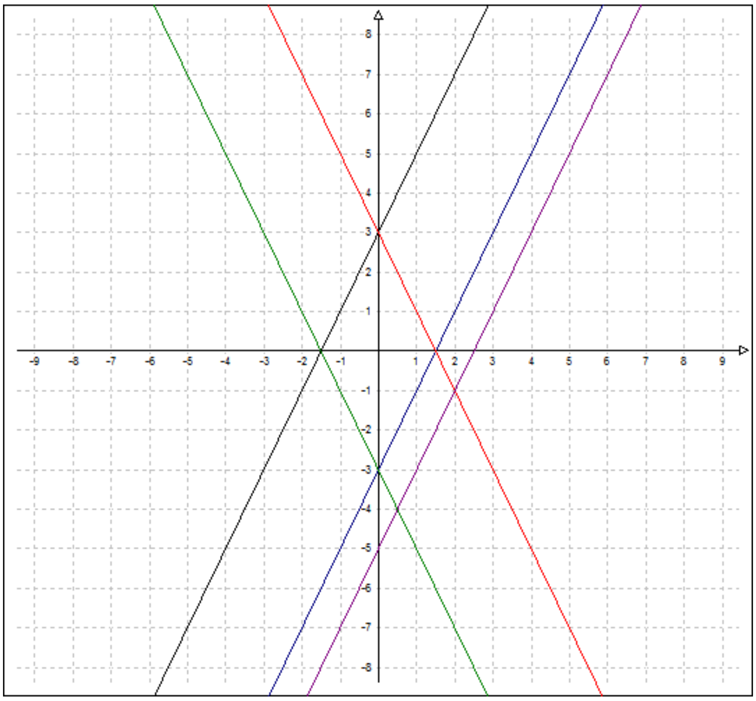
Ikke-lineære funktioner - Facitliste

En del opgaver i dette kapitel er formuleret, så der ikke er noget kanonisk facit, da resultatet på forskellig måde afhænger af elevens valg. Til disse opgaver anføres ofte blot ”Intet fast facit” eller lignende.

FACIT SIDE 38-39

Opgave 1

A Tegning af fem grafer



B Elevtekst.

C Intet fast facit. Der skal tegnes graferne for to lineære funktioner med hældningskoefficienten 2 (fx g og j som man allerede har tegnet).

D Intet fast facit. Der skal tegnes graferne for to lineære funktioner med hældningskoefficienten $\frac{1}{2}$.

AKTIVITET: MATCH SAMMENHÆNGE

A Udklip fra arket ‘match sammenhænge’.

B Beskrivelsen A hører sammen med tabellen G, med funktionsudtrykket L og med grafen O.
Beskrivelsen B hører sammen med tabellen H, med funktionsudtrykket K og med grafen P.
Beskrivelsen C hører sammen med tabellen E, med funktionsudtrykket J og med grafen N.
Beskrivelsen D hører sammen med tabellen F, med funktionsudtrykket I og med grafen M.

C Eleveksempel.

Opgave 2

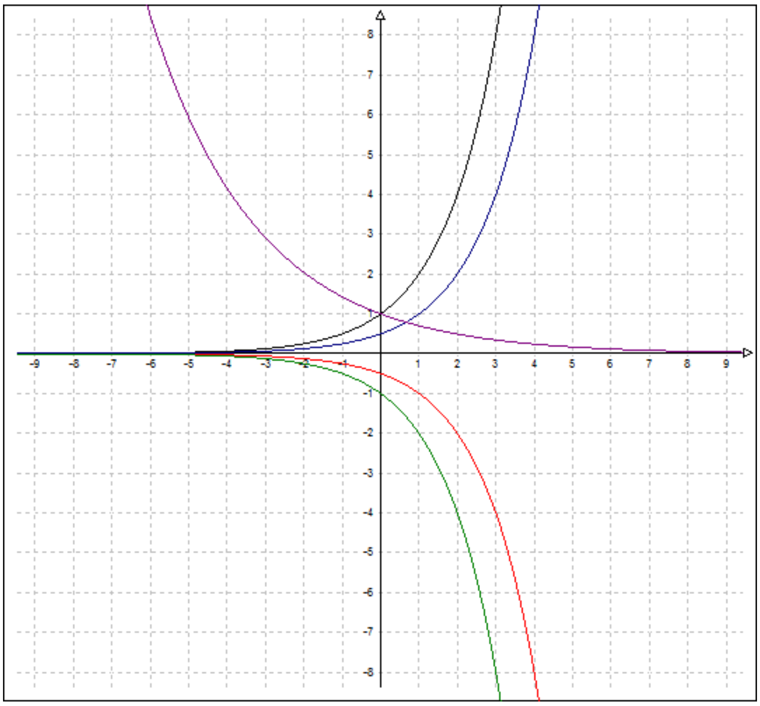
A Intet fast facit.

Bemærk: Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ opfylder alle fem krav.

B Redegørelse for de krav elevens funktion opfylder.

Opgave 3

A Tegning af grafer.



B Elevtekst.

UNDERSØGELSE: SORTÉR GRAFER

DEL 1

A-E Sortering af grafer, fotografering, redegørelse for sorteringskriterier.

Det er selvfølgelig oplagt – kapitlets titel taget i betragtning – at sortere i lineære (4 og 7) og ikke-lineære (1, 2, 3, 5, 6, 8) funktioner. Også voksende funktioner (5 og 7), aftagende funktioner (2 og 4), hverken voksende eller aftagende funktioner (1, 3 6 og 8) er en oplagt mulighed. Nogle vil måske betegne funktionen 3 som aftagende og funktionen 8 som voksende. Det er "næsten" rigtigt. Funktionen 3 er aftagende i intervallet $]-\infty; 0[$ og i intervallet $]0; \infty[$, men den er ikke generelt aftagende, Det ville kræve, at der for ethvert par af tal x_1 og x_2 i Dm(f) skulle gælde, at hvis x_1 var mindre end x_2, skulle $f(x_1)$ være større end $f(x_2)$. Det gælder i hvert af de to nævnte intervaller, men det gælder ikke, hvis x_1 er negativ og x_2 er positiv. Tilsvarende betragtninger gælder for funktionen 8.

Desuden kan man slå de forskellige typer sammen med voksende/aftagende, så fx 4 bliver lineær *og* aftagende osv.

Elever med større kendskab til de enkelte funktionstyper kan fx sortere i:

Lineære funktioner: 4 og 7.
Andengradsfunktioner: 1 og 6.
Eksponentielle funktioner: 2 og 5.
Omvendte proportionaliteter: 3 og 8.

DEL 2

A Eleverne tegner grafer med et digitalt værktøj.

B Sammenhængen mellem funktionsudtryk og grafer er:

Funktionsudtryk *g* svarer til graf 1.
Funktionsudtryk *e* svarer til graf 2.
Funktionsudtryk *b* svarer til graf 3.
Funktionsudtryk *f* svarer til graf 4.
Funktionsudtryk *a* svarer til graf 5.
Funktionsudtryk *c* svarer til graf 6.
Funktionsudtryk *h* svarer til graf 7.
Funktionsudtryk *d* svarer til graf 8.

C Elevvurdering af egne sorteringskriterier.

FACIT SIDE 40-41

UNDERSØGELSE: GRAFER FOR OMVENDT PROPORTIONALITETER

DEL 1

A Elevtegnede grafer efter forskrifterne.

B Elevundersøgelse af sammenhængen mellem forskrifter og udseende/placering af graferne.

C Elevvalgte udsagn.

DEL 2

A-B Eleverne tegner de grafer, der hører til funktionsudtrykkene på U2, indtegner linjerne med ligningerne $y = x$ og $y = -x$ på hver graf og aflæser koordinaterne til skæringspunkterne mellem graf og linjer.

Skæringspunkterne mellem grafen for $y = \frac{a}{x}$ og de to linjer er for $a > 0$

$$(\sqrt{a}, \sqrt{a}) \text{ og } (-\sqrt{a}, -\sqrt{a})$$

og for $a < 0$

$$(\sqrt{-a}, -\sqrt{-a}) \text{ og } (-\sqrt{-a}, \sqrt{-a}).$$

Det giver følgende skæringspunkter:

f: (5, 5) og (–5, –5)
g: (–2, 2) og (2, –2)
h: (–4, –4) og (4, 4)
i: (–3, 3) og (3, –3)
j: $(-\sqrt{10}, \sqrt{10})$ og $(\sqrt{10}, -\sqrt{10})$ $(\sqrt{10} \approx 3{,}16)$

C Elevundersøgelse. Se punkt B.

D Elevudsagn.

DEL 3

A-C Arbejde med skærmoptagelse.

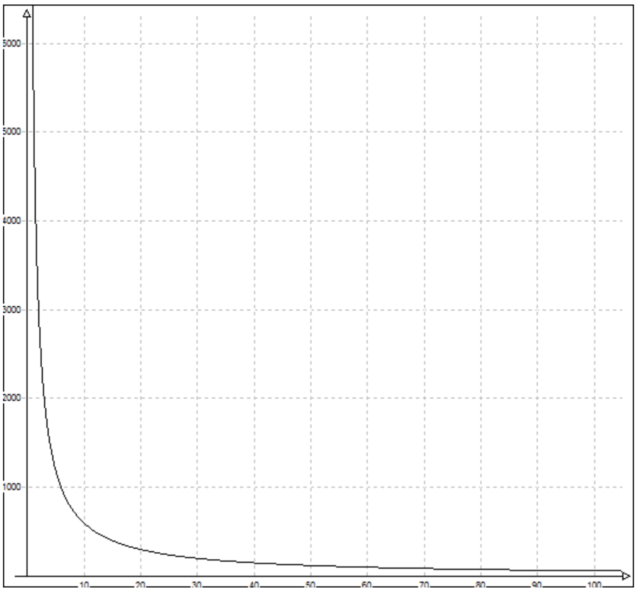
Opgave 4

A Elevudfyldt tabel. Bemærk, at kun deltagerantallene 5, 10 og 25 er vist i bogen, og at deltagerantal over 105 er udelukket. Herunder er de sædvanlige prisafrundingsregler anvendt.

Antal deltagere	5	10	25	50	60	70	80	90	100
Pris pr. deltager	1200	600	240	120	100	85,50	75	66,50	60

B Pris $p(n)$ pr. deltager som funktion af antal deltagere n : $p(n) = \frac{6000}{n}$.

C Graf for $p(n)$.



FACIT SIDE 42-43

Opgave 5

A	Ikke eksponentiel funktion.
B	Eksponentiel funktion.
C	Ikke eksponentiel funktion.
D	Ikke eksponentiel funktion.
E	Eksponentiel funktion.
F	Ikke eksponentiel funktion.
G	Ikke eksponentiel funktion.

Opgave 6

Graferne for funktionerne tegnes ikke her.

A	Eksponentielt voksende funktion.
B	Eksponentielt aftagende funktion.
C	Eksponentielt aftagende funktion.
D	Eksponentielt voksende funktion.
E	Eksponentielt aftagende funktion.
F	Eksponentielt voksende funktion.
G	Eksponentielt voksende funktion.

UNDERSØGELSE: UNDERSØG EKSPONENTIELLE FUNKTIONER

DEL 1

A Elevtegning med mulighed for at ændre parametrene.

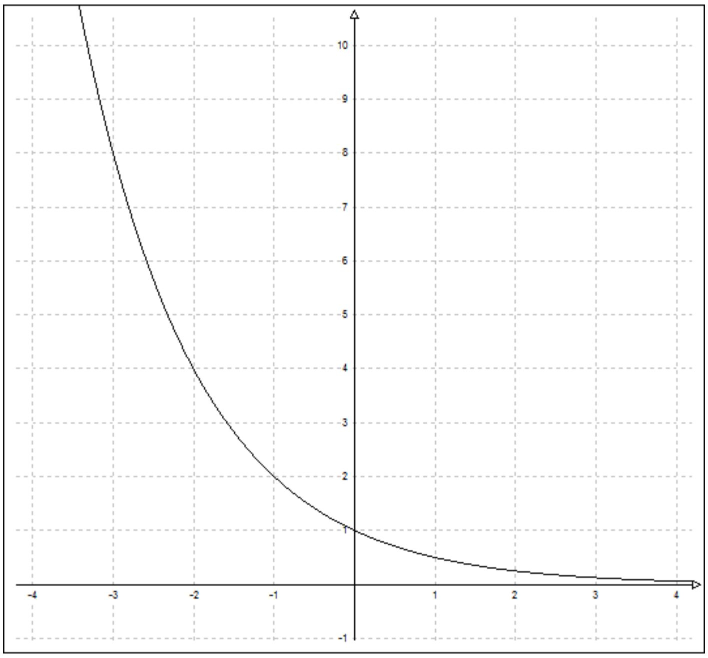
B Tallet b er funktionsværdien for $x = 0$, dvs. b angiver grafens skæring med y-aksen.

C For $a > 1$ er funktionen voksende, dvs. grafen går opad mod højre.
For $a = 1$ er funktionen konstant, dvs. er en vandret linje med ligningen $y = b$..
For $0 < a < 1$ er funktionen aftagende, dvs. grafen går nedad mod højre.

D Skærmoptagelse.

DEL 2

A-C Tegning af graf for en eksponentiel funktion, der går gennem (–3, 8), (–2, 4) og (0, 1).



Værdierne af a og b er: $a = \frac{1}{2}$, b = 1, så funktionsforskriften er $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

D Der er uendeligt mange rigtige svar. Af de tre krav:

1. $b > 1$
2. $f(1) > 2$
3. $f(10) < 1$

får vi:

f er aftagende (2. og 3.), dvs. $0 < a < 1$.
$f(0) = b > 2$ (2. og f aftagende).

Vælger vi fx b = 3, kan vi eksperimentere med a. Følgende funktion er da en af de, der opfylder betingelserne:

$$f(x) = 3 \cdot 0{,}8^x$$

idet $f(1) = 2{,}4$ og $f(10) \approx 0{,}257$.

E Sammenligning med en anden gruppes resultat.

Opgave 7

A Elevforklaring.
Idet x er tiden i målt i minutter er $\frac{x}{20}$ tiden målt i ”blokke” à $\frac{1}{20}$ minut. Når der er gået 20 minutter, skal bakterieantallet ganges med 2. Fremskrivningsfaktoren er derfor 2. Målte vi tiden i antal 20-minutters-blokke, ville eksponenten være x, men da vi måler i antal minutter, bliver eksponenten $\frac{x}{20}$.

B Efter 1 time er der $f(60) = 800$ bakterier.

C Uligheden $f(x) > 1000$ kan af eleverne løses fx ved gæt-og-prøv-efter-metoden. Af B følger, at $x > 60$. Ved efterprøvning fås $f(66) < 1000$ og $f(67) \approx 1020$, så der vil cirka gå 67 sekunder, før der er 1000 bakterier.

En anden mulighed er at vælge et elektronisk værktøj, der kan bruges til at løse problemet fx et passende CAS-program eller GeoGebra.

Opgave 8

A Hvis Danmark i 2018 har en befolkningstilvækst på 0,59 % pa. Vil fremskrivningsfaktoren være 1,0059.

B En befolkningstilvækst på 0,4 % pa. Svarer til an fremskrivningsfaktor på 1,004.

FACIT SIDE 44-45

Opgave 9

A En funktion, der udtrykker omkredsen af et kvadrat med sidelængden x er $O(x) = 4x$.

B Arealet er $15{,}5^2 = 240{,}25$ cm^2.

C Sidelængden x er $\sqrt{625} = 25$ cm.

D Sidelængden x er positiv og løsning til ligningen $x^2 = 4x$. Rødderne i ligningen er 0 og 4, så svaret er 4.

Opgave 10

Elevvalgte funktionsforskrifter. Der er altså ingen faste facits, men de valgte løsninger skal opfylde, at funktionen for en positiv værdi af a skal have forskriften:

A $f(x) = -ax^2 + 4ax - 4a + 4$

For eksempel

$a = 1$: $y = -x^2 + 4x$

$a = 2$: $y = -2x^2 - 8x - 4$

B $f(x) = ax^2 + 4ax + 4a + 1$

For eksempel

$a = 1$: $y = x^2 + 4x + 5$

$a = 2$: $y = 2x^2 + 8x + 9$

C $f(x) = ax^2 - 2ax + a$

For eksempel

$a = 1$: $y = x^2 - 2x + 1$

$a = 2$: $y = 2x^2 - 4x + 2$

UNDERSØGELSE: PARABLER

DEL 1

A-D Grafisk betydning af konstanten a:

For $a > 0$ vender parablen grenene opad, og for $a < 0$ vender parablen grenene nedad.

Når a er numerisk stor er parablen meget ”spids”, og når a er numerisk lille er parablen meget ”flad”.

C Tallet c angiver grafens skæring med y-aksen.

DEL 2

A-C Undersøgelse af den grafiske betydning af konstanten b for parablen med ligningen

$$y = ax^2 + bx + c$$

Når konstanten b varierer, bevæger parablens toppunkt sig på en parabel med ligningen $y = -ax^2 + c$

DEL 3

A-C Eleverne laver skærmoptagelser, deler med en anden gruppe og justerer evt. som følge af feedback.

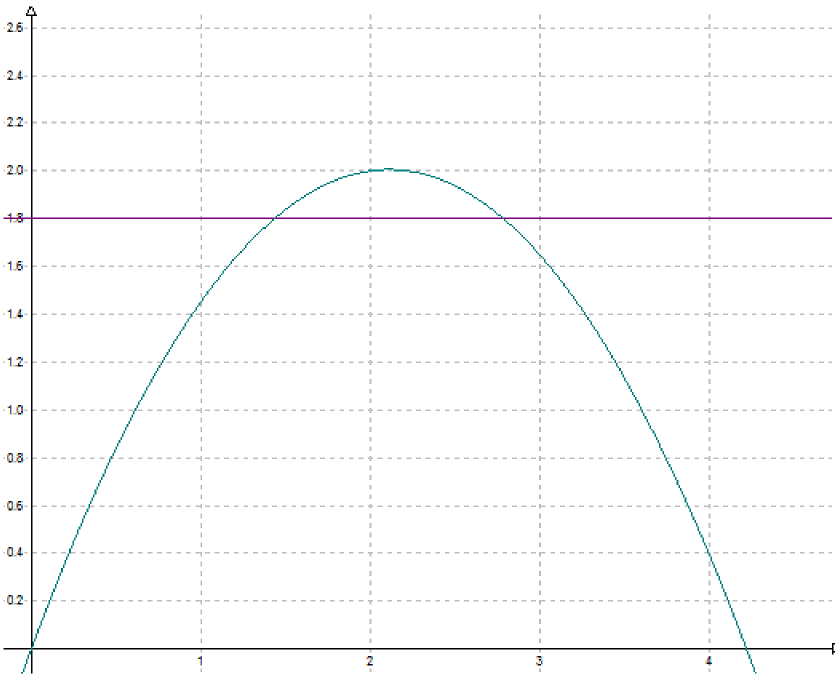
Opgave 11

A Graf. Se punkt D.

B Bolden rammer jorden efter 1,9 : 0,45 ≈ 4,22 m.

C Den største højde over jorden fås for $x = \frac{1{,}9}{2 \cdot 0{,}45} = 2{,}\overline{1}$ til 2,01 m (eksakt $2{,}00\overline{5}$ m).

D Grafen for *f* og linjen med ligningen *y* = 1,8. Som det fremgår af figuren herunder er *f*(3) < 1,8, så Karl bliver ramt af bolden.



E Intet fast facit. Funktionen skal være af formen $f(x) = ax^2 + bx$ og opfylde $a < 0$, samt $f(3) > 1{,}8$. Et eksempel kunne være $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$, men (uendeligt) mange andre er mulige.

FACIT SIDE 46-47

Opgave 12

A Fra 2015 til 2027 er der 12 år. Hvis vi betegner den årlige procentvise tilvækst med *r* (skrevet som decimaltal), skal der derfor gælde:

$$580.300 \cdot (1+r)^{12} = 684.300$$

$$r = \sqrt[12]{\frac{684.300}{580.300}} - 1 \approx 0{,}0138$$

Det betyder, at den årlige procentvise vækst i perioden skal være ca. 1,38 %, hvis embedsmændenes prognose skal holde stik.

B En funktionsforskrift, der efter embedsmændenes prognose beskriver indbyggerantallet i København som funktion af årstallet, er

$$f(x) = 580.300 \cdot 1{,}0138^{x-2015}$$

C Vi har

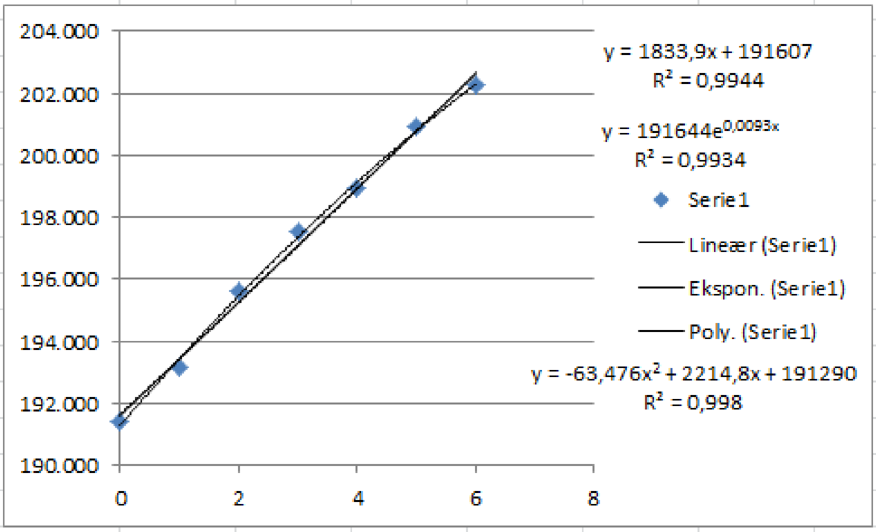
$$f(2018) = 580.300 \cdot 1{,}0138^3 \approx 604.657$$

Dette tal er kun 0,36 % større end det faktiske, så funktionsforskriften må siges at passe rimeligt.

Opgave 13

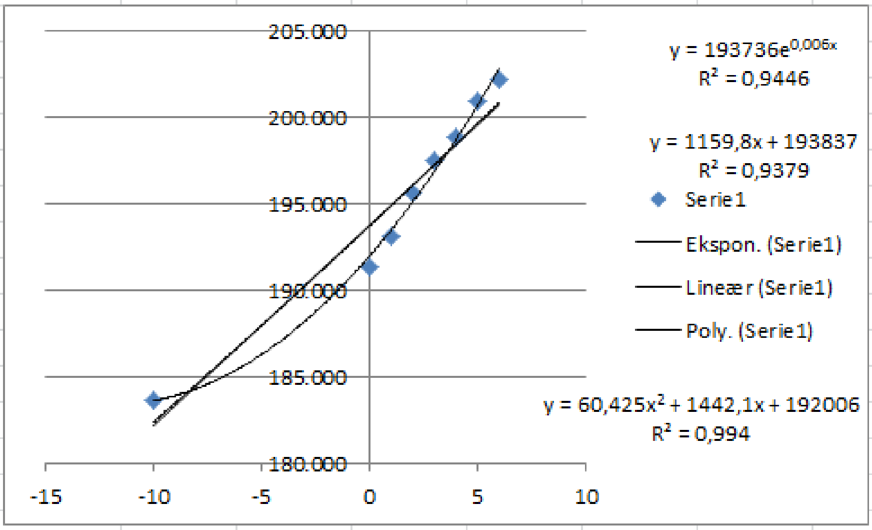
A Herunder er udviklingen i befolkningstallet i Odense kommune undersøgt som funktion af antal år efter 2011. Der er forsøgt regression efter såvel en lineær som en eksponentiel og en polynomisk model. Som det ses, er der så lille forskel på de tre modellers R^2-værdier, at det næppe er rimeligt at fremhæve en af dem som bedre end de andre.

År efter 2011	0	1	2	3	4	5	6
Befolkningstal	191.400	193.174	195.598	197.513	198.912	200.917	202.250



B Hvis vi inddrager befolkningstallet i 2001 (som så i ovenstående nummerering bliver år –10, dvs. 10 år *før* 2011) ser billedet således ud:

År efter 2011	-10	0	1	2	3	4	5	6
Befolkningstal	183.691	191.400	193.174	195.598	197.513	198.912	200.917	202.250



Her falder den lineære model uheldigst ud, og den polynomiske model er tilsyneladende den, der passer bedst til de foreliggende data.

C-D Elevens (begrundede) mening om ”den bedste” regressionsmodel.
Indbyggertallet i 2030 ud fra den valgte model.

Det er i forbindelse med disse spørgsmål vigtigt at diskutere modellernes holdbarhed og gyldighedsområde med eleverne. Selv om alle tre modeller beskriver udviklingen i perioden 2011-2017 temmelig godt, er der *intet*, som kan fortælle, om en af disse tre udviklinger fortsætter. Og selv om vi vælger at stole på en af modellerne, er det meget usikkert, hvor langt ude i fremtiden vi kan regne med den.

Man kan påstå, at selv om statistikken som selvstændig videnskab har gennemgået en rivende udvikling i det tyvende århundrede, står Robert Storm Petersens udtalelse – som vi i denne sammenhæng passende kunne kaldede ”Storm P’s sætning” – stadig til troende: ”Det er svært at spå – især om fremtiden!”.

E Elevernes undersøgelse af befolkningsudviklingen i egen kommune.

AKTIVITET: ANALYSE AF BOLDKAST

DEL 1-DEL 3

Ingen faste facits.

FACIT SIDE 48-49

AKTIVITET: FUNKTIONER FOR FIGURFØLGER

DEL 1-DEL 2

Ingen faste facits.

Opgave 14

A Tabel. Der er ikke i opgaven noget krav om største figurnummer. Her er valgt 10.

Figur nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antal prikker P	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Antal streger S	0	3	9	18	30	45	63	84	108	135

Hvis vi lader P(n) og S(n) betegne hhv. antallet af prikker og antallet af streger i figur nr. n gælder:

B P(n) = 1 + 2 + 3 + ... +n = $\frac{n\cdot(n+1)}{2} = 0{,}5(n^2 + n)$

C Man kan for $n \geq 1$ udtrykke antallet af streger i figur nr. n ved hjælp af antallet af streger i figur nr. $n - 1$ således:

S(n) = S(n – 1) + n, startende med P(1) = 0.

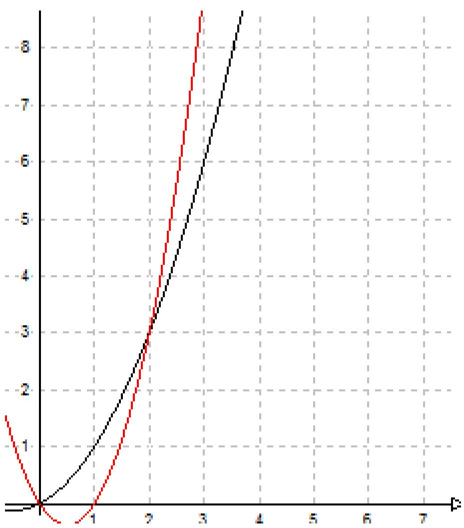
Dette er en såkaldt *rekursiv* formel, som er en helt gyldig måde at angive det søgte på.

En anden måde er at bruge regression og vælge en polynomisk udvikling. Herved fås:

S(n) = 1,5·(n^2 – n)

med forklaringsgrad R^2 = 1.

D Grafer for de to funktioner:



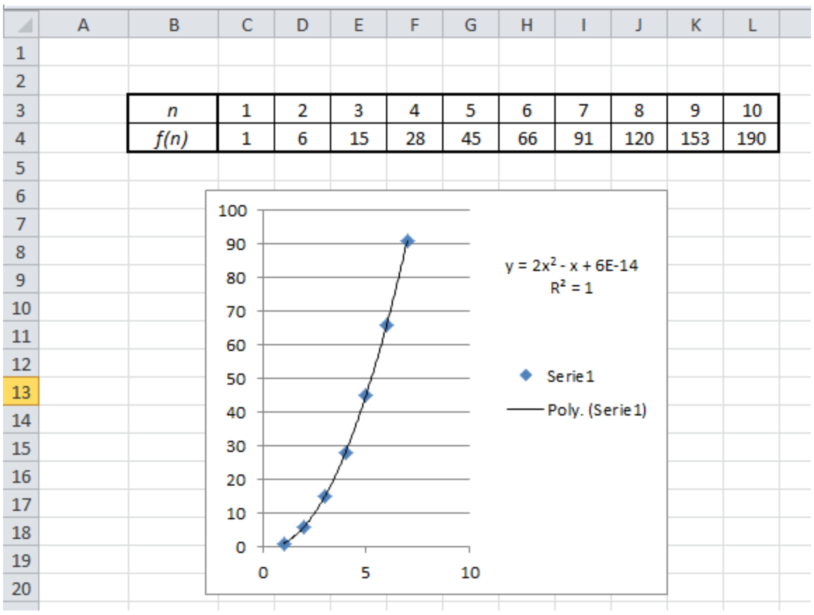
E Med 100 streger kan man – jf. tabellen – højst bygge figur nr. 8. Dertil kræves 36 prikker, men det er der også (P = 75). Der er altså prikker men ikke streger nok til at bygge en større figur, så det er antallet af streger, der bestemmer, hvor stor en figur der kan bygges.

Opgave 15

A Der er ikke i opgaven forlangt en bestemt størrelse af tabellen. Her er valgt figur 1-10.

Figur nummer *n*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antal kuber	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190

B Sammenhængen er en andengradsfunktion. I Excel ser det således ud:



Man skal ikke lade sig narre af, at konstanten *c* angives til $6 \cdot 10^{-14}$. Det er sådan noget, der af og til sker i elektroniske hjælpemidler pga. den måde tallene internt repræsenteres.
Sammenhængen er

$$f(n) = 2n^2 - n$$

C Antal kuber i figur nr. 15, 100 og 999:

$f(15) = 435$

$f(100) = 19.900$

$f(999) = 1.995.003$

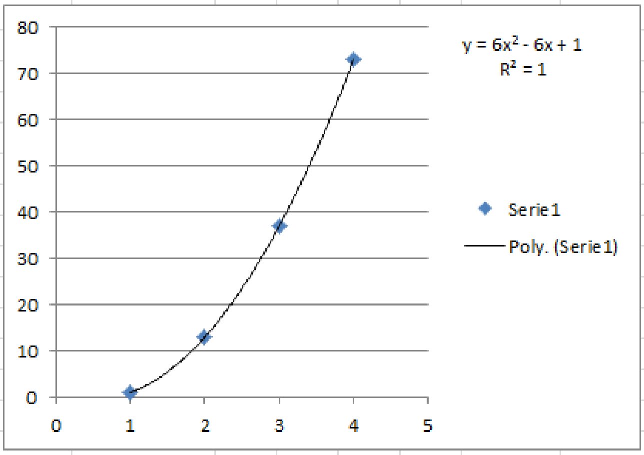
Opgave 17

A Tabel over sammenhængen mellem figurnummer og antal prikker.
For figur nr. 1-4 kan antallet af prikker findes ved simpel optælling.

Figurnummer	1	2	3	4
Antal prikker	1	13	37	73

B Ved polynomisk regression finder man følgende sammenhæng:

Figurnummer	1	2	3	4
Antak prikker	1	13	37	73



Andre sammenhænge er mulige, men da R^2-værdien her er 1, vil denne sammenhæng være en af dem, der passer perfekt til de givne data, og det vil da være naturligt at vælge den:

$f(x) = 6x^2 - 6x + 1$ $\qquad$ x = figurnummer, $f(x)$ = antal prikker.

C Der er tale om en andengradssammenhæng.

D Der gælder

$f(10) = 541$

$f(100) = 59.401$

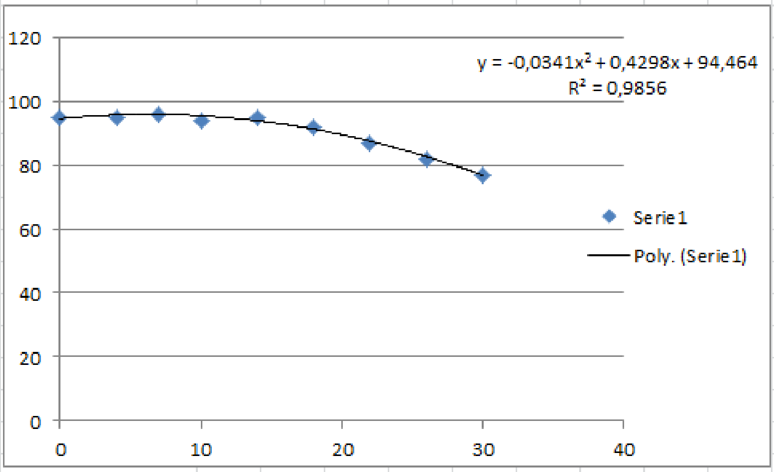
Opgave 18

A Den beskrevne udvikling undersøges som funktion af antal år efter 1984.

Årstal	Antal år efter 1984	Procentdel der har prøvet at drikke alkohol
1984	0	95
1988	4	95
1991	7	96
1994	10	94
1998	14	95
2002	18	92
2006	22	87
2010	26	82
2014	30	77

Ved ikke-lineær regressionsanalyse fås den bedste sammenhæng som en andengrads-sammenhæng.

Antal år efter 1984	0	4	7	10	14	18	22	26	30
Procentdel	95	95	96	94	95	92	87	82	77



B Regressionsanalysen giver sammenhængen

$$f(x) = -0{,}0341x^2 + 0{,}4298x + 94{,}464$$

Der er naturligvis grund til at lægge vægt på, at mens denne sammenhæng ganske godt beskriver udviklingen i perioden 1984-2014, er der ingen garanti for, i hvilken grad den er beskrivende for den beskrevne procentdel *før* 1984 eller *efter* 2014. Blandt andet kan man se, at funktionen ”et eller andet sted” *før* 1984 og ”et eller andet sted” *efter* 2014 vil antage negative værdier, hvad der i sammenhængen er absurd.

C Bruger vi alligevel funktionen f får vi:

Procentdel 2018 = $f(34) \approx 69{,}6$ %
Procentdel 2022 = $f(38) \approx 61{,}6$ %

D Idet $f(38) = 61{,}6$ % og $f(39) = 59{,}4$ %, vil en procentdel mindre end eller lig med 60 % opnås efter modellen i år 39 efter 1984, dvs. i år 2023.

E Hvor langt kan tallet komme ned? Begrundet elevgæt.

FACIT SIDE 50-51

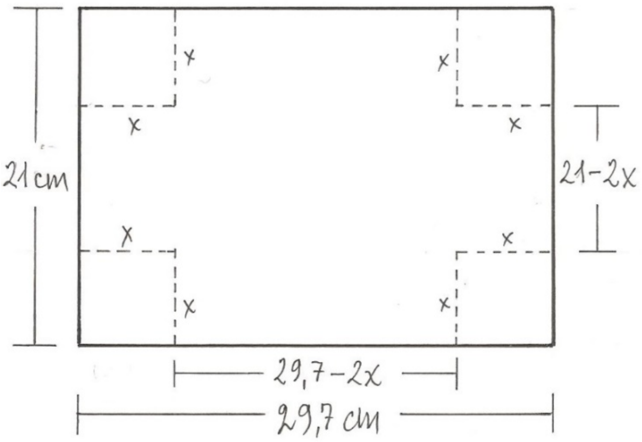
TEMA: ÆSKEFOLDNING

DEL 1

A-D Eleverne folder fire forskellige æsker, finder de fire rumfang og bestemmer den æske, der har det største rumfang.

DEL 2

A Undersøgelse af det størst mulige rumfang af en æske foldet af A4-papir (21,0 × 29,7 cm).



a. Længden *x* skal tilhøre intervallet]0; 10,5[målt i cm.

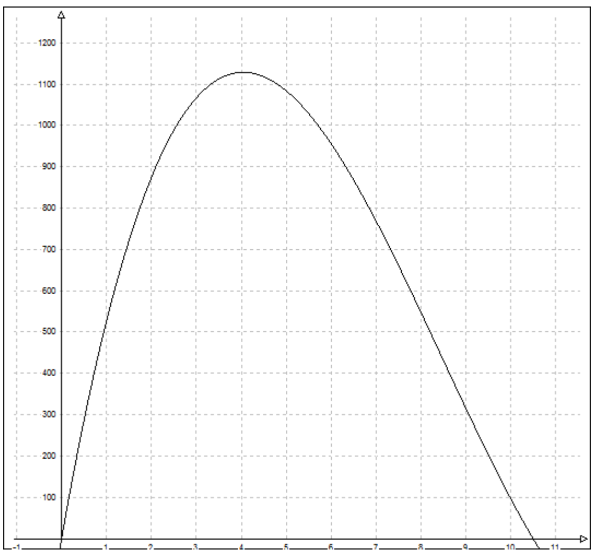
b. Tabel:

Fraklip *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rumfang	526,3	873,8	1066,5	1128,4	1083,5	955,8	769,3	548,0	315,9	97,0

c. Rumfanget hørende til fraklippet *x* er

$$R(x) = x \cdot (21 - 2x) \cdot (29{,}7 - 2x) = 4x^3 - 101{,}4x^2 + 623{,}7x$$

Grafen ser således ud:



B Som man kan se af tabellen (og grafen) fås det største rumfang for $x \in]4; 5[$. I afrundede tal er det største rumfang lig med 1128,50 cm^3, og det opnås for $x \approx 4{,}04$ cm. Begrundelsen herfor fremgår af grafen.

DEL3

A-D Eleverne fremstiller den størst mulige æske, og sammenligner æsker og begrundelser.

DEL 4

A Hvis man i stedet for A4 brugte A3 ville længdeforholdene bliver ganget med 2, og rumfanget dermed ganget med $2^3 = 8$.
For A2 ville rumfanget blive ganget med $2^3 \cdot 2^3 = 2^6 = 64$.

B Elevundersøgelse uden fast facit.

EVALUERING

DEL 1 – DEL 2

Elevaktiviteter. Eleverne forklarer betydningen af de begreber, de har lært om.

DEL 3

A-F Elevvalgte funktionsforskrifter. Ingen faste facits, men følgende kan bemærkes:

A En funktion af typen $f(x) = \frac{a}{x}$, hvor $a > 0$.

B En funktion af typen $f(x) = \frac{a}{x}$, hvor $a < 0$.

C Mange muligheder. Den simpleste er $f(x) = x^2$.

D Mange muligheder, fx $f(x) = -x^2 + 2x + 2$. (Toppunkt (–1, 1))

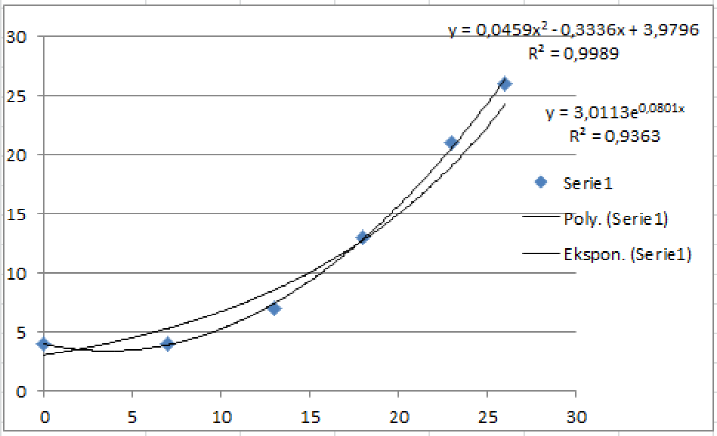
E Mange muligheder, fx $f(x) = 5 \cdot 0{,}1^x$.

D Mange muligheder, fx $f(x) = 2^x$.

DEL 4

A En polynomisk og en eksponentiel model giver i Excel disse resultater:

Årstal	1987	1994	2000	2005	2010	2013
År efter 1987	0	7	13	18	23	26
Procentdel	4	4	7	13	21	26



Som det ses, kan begge modeller bruges til at beskrive de seks målinger.

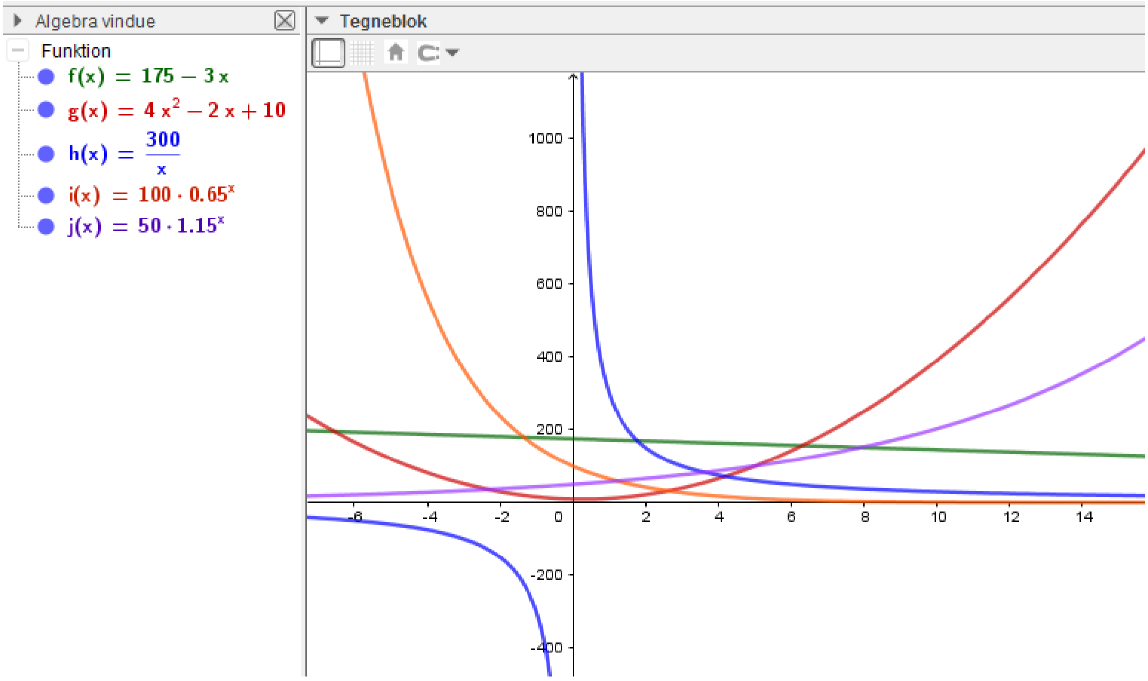
B Der eksisterer ikke nogen viden om, hvilken type model udviklingen af antal kvinder i alderen 16-24 år, som føler sig stressede, typiske vil følge, så vi har ikke noget empirisk holdepunkt for at vælge den ene model frem for den anden. Det eneste fingerpeg er R^2-værdien, som er tættere på 1 for den polynomiske model end for den eksponentielle. Det er dog et godt gæt, at enhver statistiker med respekt for sig selv vil advare kraftigt mod at stole meget på nogen af modellerne.

FACIT SIDE 52-53

TRÆN 1 – FÆRDIGHEDER

Opgave 1

A Grafer. Her tegnet i GeoGebra. Det kræver lidt "vridning" af akserne at få alle grafer gjort synlige samtidig.



B Funktionen *f* er en lineær funktion.
Funktionen *g* er en andengradsfunktion.
Funktionen *h* er en omvendt proportionalitet.
Funktionen *i* er en eksponentiel funktion.
Funktionen *j* er en eksponentiel funktion.

C Største funktionsværdi for

$x = -2$: Funktionen *i*. ($i(-2) \approx 236{,}69$)
$x = -1$: Funktionen *f*. ($f(-1) = 178$)
$x = 1$: Funktionen *h*. ($h(1) = 300$)
$x = 10$: Funktionen *g*. ($g(10) = 390$)

D Mindste funktionsværdi for

$x = -3$: Funktionen *h*. ($h(-3) = -100$)
$x = 0{,}5$: Funktionen *g*. ($g(0{,}5) = 10$)
$x = 2$: Funktionen *g*. ($g(2) = 22$)
$x = 8$: Funktionen *i*. ($i(8) \approx 3{,}19$)

Opgave 2
A, B og G er ligefrem proportionaliteter, da de alle er af formen $y = ax$.

Opgave 3
A og D er omvendt proportionaliteter, da de begge er af formen $y = \frac{a}{x}$.

Opgave 4
A
- Sammenhængen er en andengradsfunktion.
- Sammenhængen er en omvendt proportionalitet.
- Sammenhængen er en eksponentiel funktion.

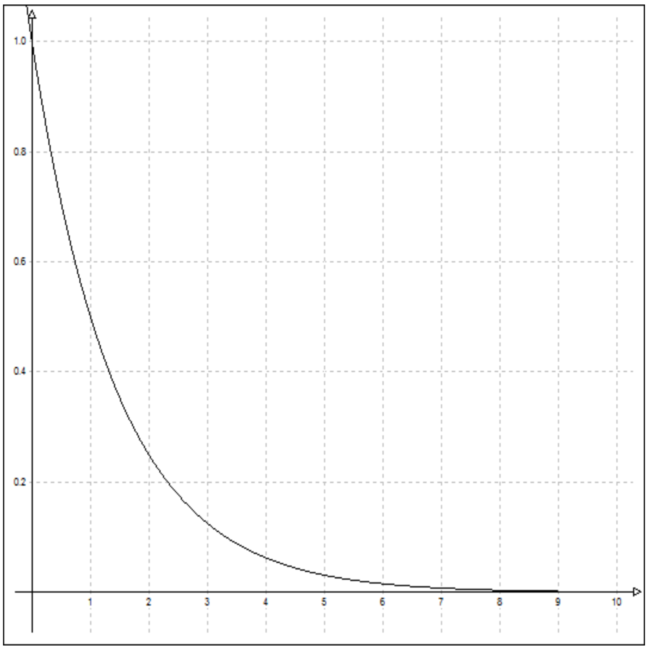
Opgave 5
A-E Eleveksempler på funktionstyper og grafer. Ingen faste facits.

Opgave 6
A Tabel. Ax-papir forhandles for $x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$:

A-nummer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Areal i cm^2	10.000	5000	2500	1250	625	312,50	156,25	78,13	39,06	19,53	9,77

B Her er tegnet en kontinuert graf for funktionen $A(x) = 0{,}5^x$. I relation til det aktuelle problem (Ax-papir) er funktionen som nævnt i A kun defineret for $x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$, idet det største eksisterende A-papir i handlen er A0, og det mindste er A10.

I virkeligheden burde grafen være en punktgraf – der er ikke noget, som fx hedder A2,5-papir. Her tegnes den alligevel sammenhængende, med enheden meter på y-aksen.



C Idet 1 m^2 = 10.000 cm^2 søger vi her det mindste hele tal x for hvilket $10.000 \cdot 0{,}5^x < 1$. Ved fx simpel inspektion fås løsningen $x = 14$ (areal ca. 0,61 cm^2).

TRÆN 2 – FÆRDIGHEDER

Opgave 1

A	Grafen for en eksponentielt voksende funktion.
B	Grafen for en andengradsfunktion.
C	Grafen for en eksponentielt aftagende funktion.
D	Grafen for en omvendt proportionalitet.
E	Funktionsudtrykket hørende til en andengradsfunktion.
F	Funktionsudtrykket hørende til en omvendt proportionalitet.
G	Funktionsudtrykket hørende til en eksponentielt aftagende funktion.
H	Funktionsudtrykket hørende til en voksende lineær funktion.

Opgave 2

A-B Elevernes hverdagseksempler på ligefremme proportionaliteter. Forskrift og graf på én af dem. Intet fast facit.

Opgave 3

A Mange muligheder, For eksempel $f(x) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$.
Samtlige løsninger kan skrives på formen $f(x) = a\cdot(x + 2)^2 + b$, hvor a og b er vilkårlige reelle tal.

B Mange muligheder, For eksempel $f(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$.
Samtlige løsninger kan skrives på formen $f(x) = a\cdot(x - 1)^2 + b$, hvor a og b er vilkårlige reelle tal.

Opgave 4

A Elevernes gæt på sammenhænge.

B Bemærk, at resultaterne her kan afhænge at det elektroniske værktøj, der er brugt.
Regressionsanalyse giver:

$f(x)$: Det bedste fit er en andengradsfunktion med $R^2 = 0{,}992$.
$f(x) = 1{,}2857x^2 - 0{,}1143x - 0{,}4$.

$g(x)$: Det bedste fit er en eksponentiel funktion med $R^2 = 1$.
$g(x) = 1000\cdot e^{0{,}0247x} = 1000\cdot 1{,}025008^x$.

$h(x)$: Sammenhængen er en omvendt proportionalitet:

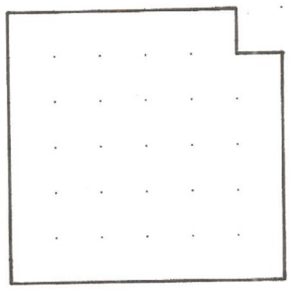
$$h(x) = \frac{500}{x}$$

Om det kan opdages vha. regression afhænger af de programmer, man har til rådighed.

$i(x)$: Det bedste fit er en andengradsfunktion med $R^2 = 1$.
$i(x) = x^2 + 2x - 2$

Opgave 5

A Figur nr. fem ser således ud:



B Tabel for figurerne 1-10:

Figur nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antal 1×1-kvadrater	3	8	15	24	35	48	63	80	99	120

C Antallet af 1×1-kvadrater i figur nr. n er $(n + 1)^2 - 1 = n^2 + 2n$.

D Der er 120 kvadrater i figur nr. 10.

FACIT SIDE 54-55

TRÆN 1 – PROBLEMLØSNING

Opgave 1

A Graf, forskrift eller tabel. Her angives en forskrift.

$y = \frac{1}{2}x$

B $f(x) = 14{,}95x$

C Funktionen g_1 angiver antal Euro som funktion af antal danske kroner x, funktionen g_2 angiver antal danske kroner som funktion af antal Euro x.

$g_1(x) = 7{,}43x$

$g_2(x) = \frac{1}{7{,}43}x$

D $y = x + 2$

E $h(x) = 75x$

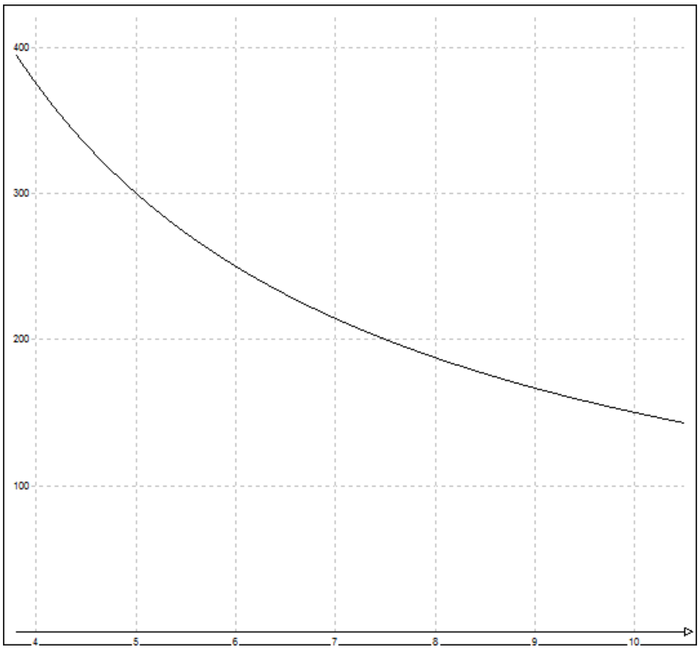
Opgave 2

A Tabel. Antal tabelindgange og dermed antal personer er ikke specificeret. Teksten antyder, at der skal deles mellem mindst 4 personer (Signe, Maja og ven*ner* (flertal)).

Antal personer:	4	5	6	7	8	9	10
Antal g pr. person:	375	300	250	214	188	167	150

B $f(x) = \frac{1500}{x}$

Graf. Grafen tegnes sammenhængende, selv om det egentlig er en punktgraf.



Opgave 3

Vi går ud fra (selv om det ikke nævnes eksplicit i opgaven), at banekurverne er opstillet således, at de tre piger slipper bolden i et punkt på *y*-aksen angivet ved konstantleddet i de tre andengradsfunktioner (hhv. 1,6 – 1,7 og 1,5). Længden af skuddet måles så fra $x = 0$.

A Enida har det længste skud (ca. 8,98 m).

B Enida har også det højeste skud (ca. 3,29 m).

C Der er naturligvis mange muligheder – også selv om man holder sig inden for det realistiske – for en parabel, der kan tænkes at være kasteparabel for et kast med en håndbold.
Højden af Sofies skud er 2,3 m, og længden af Isabellas skud er 5,79 m. Vi søger derfor ligningen for en parabel, der vender grenene nedad, og hvis toppunkt har en andenkoordinat, der er større end 2,3 og som skærer *x*-aksens positive del i et tal, der er mindre end 5,79. Hvis vi regner med, at bolden slippes 1,6 m over jorden, dvs. i punktet (0; 1,6) kunne denne forskrift være en mulighed

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 1{,}6$$

Toppunktets andenkoordinat er 2,35. Den positive rod er ca. 4,16.

Opgave 4

A Forskriften for $f(x)$ er $f(x) = 0{,}25x$.
Forskriften for $g(x)$ er $g(x) = 175x$.

Opgave 5

A Tre eleveksempler. Mange muligheder, men i alle eksemplerne skal produktet af de to sidemål være 100.

B $L(x) = \frac{100}{x}$.

C $O(x) = 2\cdot(x + \frac{100}{x}) = 2x + \frac{200}{x}$.

Opgave 6

A Indiens indbyggertal i 2025 efter prognosen:

$$1.281.835.911 \cdot 1{,}0117^8 = 1.406.955.345$$

Naturligvis er der ingen mening i at bringe resultatet med denne nøjagtighed, så svaret ”ca. 1,4 milliarder” må i grunden anses for rimeligere.

B Det er ikke i opgaven angivet, hvad den uafhængige variabel *x* er.
Hvis *x* er årstallet er $h(x)$ den rigtige funktionsforskrift, men med henblik på den nøjagtighed man med rimelighed kan regne med, må man også anse $k(x)$ for at brugelig.
Hvis *x* er antal år efter 2017 kan det samme siges om funktionerne $g(x)$ og $j(x)$.
Fejlen i funktionerne *f* og *i* er vækstfaktoren 1,17, der ikke svarer til en årlig vækst på 1,17 % men til en årlig vækst på 17 %.

C Der vil gå ca. 39 år – hvis befolkningstilvæksten konstant er 1,17 % årligt (hvilket er meget usandsynligt).

TRÆN 2 - PROBLEMLØSNING

Opgave 1

Opgaven er her løst med et regneark.

A Løsningen kan aflæses i cellerne D3 og D4.

B Opgaven er her løst ved ”gæt-og-prøv-efter-metoden”. I celle C7 indtastes et gæt. I cellerne F9 og F10 kan man aflæse befolkningstallene i de to byer efter det antal år, gættet angiver. Første gang, der er flere beboere i Coolby end i Smukby, er efter 35 år.

F9 f_x =B3*1,025^C7

	A	B	C	D	E	F
1						
2	År	0	1	2		
3	Coolby	1800	1845	1891		
4	Smukby	2600	2636	2673		
5						
6						
7	Indtast gæt:		35	år.		
8						
9	Antal indbyggere i Coolby efter			35	år:	4272
10	Antal indbyggere i smukby efter			35	år:	4230
11						

Andre løsningsmetoder er selvfølgelig mulige.

Opgave 2

A Bruges fx polynomisk regressionsanalyse i Excel fås:

$$f(x) = -0{,}1667x^2 + 0{,}95\,x + 0{,}9667$$

Den eksakte løsning er

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{19}{20}x + \frac{29}{30}$$

B Idet $f(5) = 1{,}55$, og da $1{,}55 < 1{,}79$ vil Malthe blive ramt af snebolden.

C Snebolden rammer jorden 6,58 m fra Noah.

Opgave 3

A En funktion $P(x)$, der angiver prisen i kroner pr. benyttet minut (x) af streamingtjenesten i en bestemt måned er:

$$P(x) = \frac{89}{x}.$$

Bemærk, at funktionen $P(x) = \frac{8900}{x}$ er et lige så godt svar – her angiver funktionsværdierne blot prisen i øre pr. benyttet minut.

B Prisen pr. minut ved 10 timers (600 minutters) forbrug er

$$P(600) = \frac{89}{600} \approx 0{,}148 \text{ kr.} = 14{,}8 \text{ øre.}$$

C Asta kan godt vise beregninger, der hjælper til at overbevise hendes mor om, at den økonomiske del af kravet kan opfyldes. Hvis hun og hendes bror tilsammen bruger præcis 15 timer (900 minutter) om måneden på streamingtjenesten vil prisen pr. minut være

$$P(900) = \frac{89}{900} = 0{,}9\overline{8} \approx 0{,}99 \text{ kr.} = 9{,}9 \text{ øre.}$$

Og det er jo mindre end 10 øre/minut.

Om Asta også kan overbevise sin mor om, at hun og hendes bror aldrig kunne drømme om at bruge mere end 15 timer om måneden på at se serier og film, er en anden sag. I den forbindelse er et par store troskyldige øjne til mere hjælp end alverdens matematik.

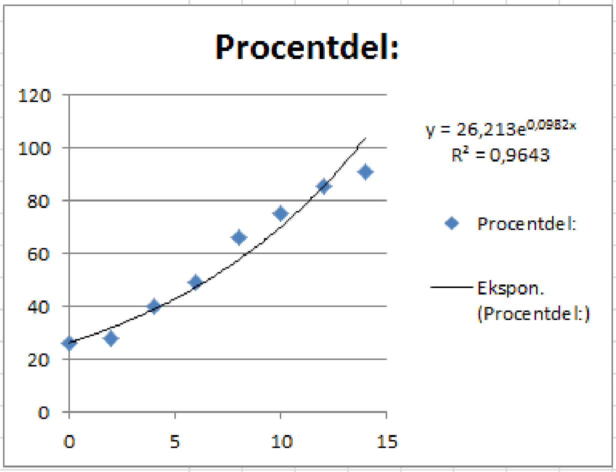
Opgave 4

A I en regressionsanalyse på datasættet er udtrykkene her udregnet ved at betragte procentdelen som funktion af antal år efter 2003 (dvs. 2003 sættes lig 0 – nul). I Excel får man da følgende:

Eksponentiel model:

Antal år efter 2003:	0	2	4	6	8	10	12	14
Procentdel:	26	28	40	49	66	75	85	91

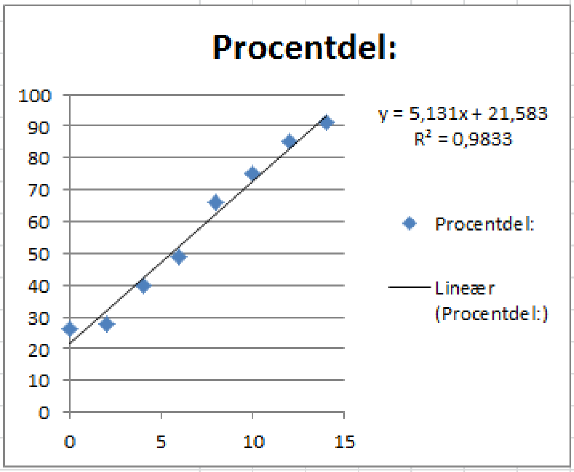
Freyas model.



Lineær model:

Antal år efter 2003:	0	2	4	6	8	10	12	14
Procentdel:	26	28	40	49	66	75	85	91

Almas model.



B Eleverne finder argumenter for og imod den enkelte model.
Der er intet fast facit her. R^2-værdierne er begge over 0,95, som det ofte kræves i den slags undersøgelser. R^2-værdien for den lineære model er naturligvis størst, men om det er nok til at fæste mest lid til den lineære model, er det man kalder ”et godt spørgsmål” – dvs. et spørgsmål, som ingen har et endegyldigt svar på.

C Vi går i dette spørgsmål ud fra, at målingerne stammer fra 1. januar de anførte år.
Efter den eksponentielle model vil de 100 % da nås i løbet af år 14 efter start, dvs. i løbet af år 2017.
Ved den lineære model vil de 100 % nås i løbet af år 16 efter start, dvs. i løbet af år 2019.
I virkeligheden er det vel et spørgsmål, om 100 % overhovedet nås, og opgaven kan også bruges som udgangspunkt for en drøftelse af, hvor langt frem en sådan model kan tages alvorligt. Ifølge fx den lineære model vil der i 2023 være 124 % af 65-74-årige, der bruger internettet, og det er der nok ingen, som hopper på!