Algebra - Facitliste

En del opgaver i dette kapitel er formuleret, så der ikke er noget kanonisk facit, da resultatet på forskellig måde afhænger af elevens valg. Til disse opgaver anføres ofte blot ”Intet fast facit” eller lignende.

FACIT SIDE 90-91

Opgave 1

A $h = \frac{2 \cdot 48}{12}$ cm.

B $h = \frac{2 \cdot 36}{12+6}$ cm.

Opgave 2

A $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, hvor *V* er kuglens rumfang.

B $h = \frac{2A}{a+b}$, hvor *A* er trapezets areal og *a* og *b* er længderne af de parallelle sider.

Opgave 3

A For $x = 3$ og $y = 7$ fås:

- -6
- 35,3
- 11
- -45
- 3

B De reducerede udtryk er

- $-x - 3$
- $5y + 0{,}3$
- $3x - 5y + 37$
- $-xy - x - 3y$
- x

C Kontrol af reduktionen i B. Det er en alment benyttet kontrol af reduktioner, at beregne udtrykkets værdi for de samme værdier af de variable før og efter reduktionen. Hvis reduktionen (og udregningerne) er udført rigtigt, skal de to udregninger give samme tal. Det er en såkaldt ”svag” kontrol. Hvis udregningerne er foretaget rigtigt og giver to forskellige tal, er reduktionen forkert udført. Men selv hvis udregningen giver de samme tal, kan der være fejl i reduktionen.

Opgave 4

A *y* har den største værdi.

B *x* har den største værdi.

C *y* har den største værdi.

D *y* har den største værdi.

Opgave 5

A $x = 12$

B $x = 5$

C $x = 2$

D $x \in$ **R** (alle reelle tal er løsning)

E Makkersamtale

Opgave 6

A $x \geq 1$

B $x < 1{,}5$

C $x < -1$

D $x > 3$

E Makkersamtale

Opgave 7

A-B

- Der er 61 ansatte og 427 elever.

Hvis vi betegner antallet af ansatte med A og antallet af elever med E, kan vi ud fra de givne oplysninger opstille ligningssystemet

$E = 7A$

$E + A = 488$

Dette ligningssystem har løsningen $(A, E) = (61, 427)$.

- Der er 25 får på gården.

Hvis vi betegner antal får med F, kan vi opstille ligningen

$4F + 2 \cdot 13 = 126$ – med løsningen $F = 25$.

- Opvaskemaskinen kan tage bestik fra 21 gæster på én gang.

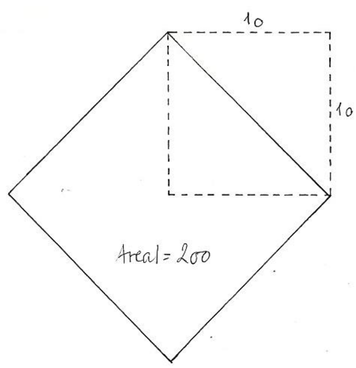
Vi betegner det søgte antal gæster med x. Hver gæst bruger i alt 8 stykker bestik. Der gælder altså

$8x = 168 \quad \Leftrightarrow \quad x = 21$

Opgave 8

A Diagonalen d er hypotenuse i en ligebenet, retvinklet trekant med kateterne 10. Ifølge Pythagoras gælder derfor

$$d = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{100 \cdot 2} = 10\sqrt{2}$$



B Elevtegning. Det søgte kvadrat kan tegnes ved først at tegne et kvadrat med sidelængden 10, og derefter tegne et nyt kvadrat med diagonalen i det første som sidelængde.

C Igen kommer Pythagoras i anvendelse:

$$d = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{x^2 \cdot 2} = x\sqrt{2}$$

D Elevforklaring.

Siden i det nye kvadrat vælges som diagonalen i det givne kvadrat.

FACIT SIDE 92-93

Opgave 9

A Cylinderens rumfang V er: $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 12 = 603{,}19$

B $h = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$

C $r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot \mathrm{h}}}$

D Elevbegrundelse.
Både højden h og grundfladeradius r skal være positive tal. Cylinderens rumfang vil derfor også være positiv.

Opgave 10

A Et lige tal kan defineres på forskellig måde, fx
1. Et lige tal er et tal, der kan skrives på formen $t = 2 \cdot n$, hvor n er et helt tal.
2. Et lige tal er et tal, der er deleligt med 2.
3. Et lige tal er et tal med 0, 2, 4, 6 eller 8 som sidste ciffer (éner-ciffer).
Disse definitioner er naturligvis ensbetydende, dvs. de tal, som er lige tal efter én af definitionerne, er det også efter de to andre.

Hvis definition 1 er den, eleverne kender, må man indrømme, at der ikke er noget at forklare. Påstanden i opgaven er blot en gentagelse af definitionen.
Med udgangspunkt i definition 2 er forklaringen, at et tal, der er deleligt med 2, jo netop er et tal, der kan skrives som 2 gange et helt tal.
Og de tal, der ender på 0, 2, 4, 6 eller 8 (definition 3) er jo netop de tal. Der er delelige med 2.

B Vi har: $h - k = (2t - 1) - (2s - 1) = 2t - 1 - 2s + 1 = 2t - 2s = 2(t - s)$
Da $t - s$ er et helt tal, når t og s er hele tal, er $2(t - s)$ og dermed $h - k$ altså et lige tal iflg. A.

Opgave 11

A Massen af platinen er $m = 21{,}5 \cdot 3 = 64{,}45$ g.

B Rumfanget er $V = \frac{50}{10{,}6}$ = 4,72 cm^3.

C Kobbers massefylde er $\rho = \frac{130}{14{,}6}$ = 8,9 g/cm^3.

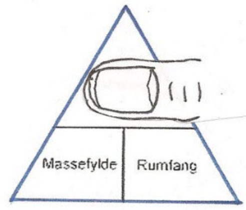
D $m = \rho \cdot V$
$V = \frac{m}{\rho}$

E Trekanten bruges ved, at man dækker den værdi, man søger fx med en finger således, at kun de to kendte værdier er synlige. Hvis disse to står ved siden af hinanden, skal de ganges for at finde det søgte. Hvis den ene står over den anden, skal den øverste divideres med den nederste.

Eksempler:

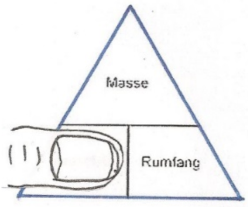
Massen m er søgt.
Massefylde ρ og rumfang V er kendt.

$$m = \rho \cdot V$$



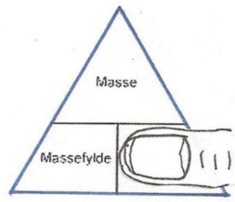
Massefylde ρ er søgt.
Masse m og rumfang V er kendt.

$$\rho = \frac{m}{V}$$



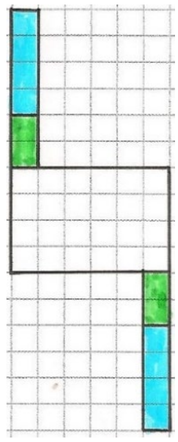
Rumfang V er søgt.
Masse m og massefylde ρ er kendt.

$$V = \frac{m}{\rho}$$



Opgave 12

A Elevtegning, figur nr. 4 i figurfølgen (tegning til højre).



B I skemaet herunder er medtaget den generelle søjle for figur nr. n.

Figur nr.	1	2	3	4	5	···	n
Antal lilla felter	4	4	4	4	4	···	4
Antal orange felter	1	4	6	8	10	···	$2n$
Antal blå felter	3	8	15	24	35	···	$n\cdot(n+2)$
Antal felter i alt	9	16	25	36	49	···	$(n+2)^2$

C I figur nr. 10 er der 20 orange felter.

D Antal orange felter O_n i figur nr. n er $O_n = 2n$.

E Alle fire udtryk passer på figur nr. 1, men kun udtryk 1 ($(n+2)\cdot n$) og 4 ($2n + n^2$) passer både til figur 1 og 2, så det er dem, der kan bruges.

F Jacob har ret. Begrundelsen ligger dels i, at de tre udtryk kan omskrives til samme udtryk og altså har samme værdi for enhver værdi af n og dels i, at udtrykkene giver det rigtige antal for de værdier af n, vi har kendskab til.

FACIT SIDE 94-95

Opgave 13

A I opgaven kræves mellemregninger. Her angives blot resultaterne

- $3a + 4b$
- $6a + b$
- $-2a - b - 1$
- $-a + 6b$
- $8a^2 + 2ab + 24a + 6b$
- $-3a^2 - b^2 + 4ab$
- 2496
- $3a - 4b$
- $2st - 23s - t + 15$
- $8st$
- $-2b^2 + 3c^2 + b$

B Makkersamtale

Opgave 14

A Omskrivningen er rigtig.

B Omskrivningen er rigtig.

C Omskrivningen er forkert.
Det dobbelte produkt er "glemt". På højre side af lighedstegnet skal stå
$5a^2 + 5b^2 + 10\,ab$

D Omskrivningen er forkert.
Ganger man de toleddede størrelser på højre side sammen, får man

$$15a - 12ab + 10b - 8b^2$$

Opgave 15

A Regnestykket passer til kvadratsætningen $(a + b)\cdot(a - b) = a^2 - b^2$.

B Regnestykket passer ikke til en kvadratsætning.

C Regnestykket passer til kvadratsætningen $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

D Regnestykket passer til kvadratsætningen $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

E Regnestykket passer til kvadratsætningen $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

F Elevfremstillet opgave.

Opgave 16

A Hvis siden i den kvadratiske endeflade betegnes s, skal s opfylde uligheden

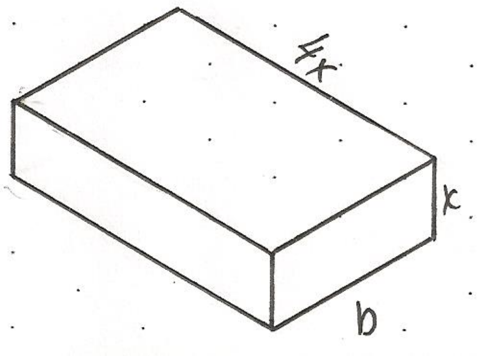
$$100 + 4s \leq 300$$

med løsningen

$$s \leq 50$$

Den maksimale sidelængde er derfor 50 cm.

B



Længde + omkreds ≤ 300 $\Leftrightarrow$

$4x + 2(b + x) \leq 300$ $\Leftrightarrow$

$2b \leq 300 - 6x$ $\Leftrightarrow$

$b \leq 150 - 3x$

Den ønskede formel er altså $b \leq 150 - 3x$.

C Kassen har højden x, længden $4x$ og en bredde, vi betegner b. Rumfanget af denne kasse er da: $V = 4bx^2$

D Intet fast facit. Udfoldning af maksimal kasse (længdeforhold 1:5) med selvvalgt højde h ($h \geq 14$ cm).

E Intet fast facit.

Opgave 17

A

- $a(b + 2c)$
- $3(a + 4b - 4c)$ evt. $3(a + 4(b - c))$
- $(a + 2b)\cdot(c + 3)$
- $b(c + e) + d(c + e) = (c + e)(b + d)$

B $\frac{2b+7b}{b} - 9a = \frac{9b}{b} - 9a = 9 - 9a = 9(1 - a)$

C $\frac{h^2-w^2}{h+w} + 2w = \frac{(h+w)\cdot(h-w)}{h+w} + 2w = h - w + 2w = h + w$

Opgave 18

A Regneudtrykket til teksten er $(x - 10)^2 + 40x - 20\cdot(5 + x)$.

B Reduktion: $x^2 + 100 - 20x + 40x - 100 - 20x = x^2$

C Resultatet afhænger af, hvilke parenteser klassen beslutter, der er ”lovligt” at sætte. Hvis man fx må skille rod og eksponent i en potens med en parentes kan man få:

$[(10 \cdot (9 + 8) - 7 : (6 - 5)) \cdot (4 + 3)]^2 + 1 = 1141^2 + 1 = 1.301.882$

FACIT SIDE 96-97

Opgave 19

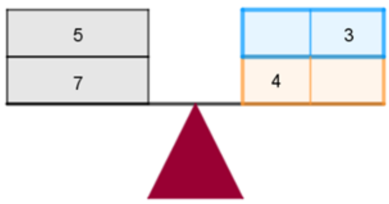
A	$x = -6$
B	$x = 2{,}5$
C	$x = -8{,}78$
D	$x = 0{,}67$
E	$x \leq 2{,}5$
F	$x \leq 10$
G	$x < -0{,}75$
H	Ingen løsninger: $L = \emptyset$.
I	Elevtegning af løsninger til E, F og G på tallinjer. Eksempel på tal, der ikke er løsning til nogen af ulighederne: Ethvert tal > 10.

Opgave 20

A-B Ingen fast løsning

Opgave 21

A Situationen er denne:



Hvis vi kalder tallet i den blå kasse (til venstre for 3-tallet) for x, skal tallet til højre for 4-tallet i den orange kasse være $x - 1$, da $3 + x = 4 + x - 1$.

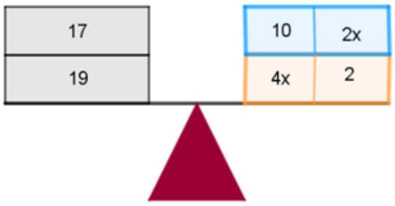
Kravet om at venstre vægtskål skal indeholde det samme som højre vægtskål giver ligningen:

$$5 + 7 = 3 + x + 4 + x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

Indholdet af de to tomme kasser på højre vægtskål er altså.

3	
	2

B Første situation er denne:



Idet vi går ud fra, at opgaven er konsistent, kan vi bestemme x på to måder:

1: Blå kasser lig med orange kasser:

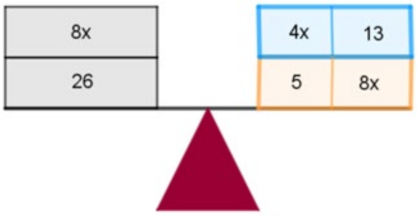
$$10 + 2x = 4x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

2: Det skulle så gerne stemme overens med det andet krav: Venstre vægtskål = højre vægtskål:

$$36 = 6x + 12 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

Det stemmer – det var jo godt!

Anden situation er denne:



Som før:

1: Blå kasser lig med orange kasser:

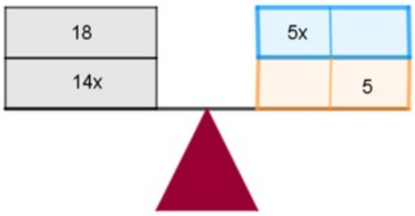
$$4x + 13 = 8x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

2: Venstre vægtskål = højre vægtskål:

$$8x + 26 = 12x + 18 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Pyh, ha' – det gik!

C Her er situationen denne:



og vi skal udfylde de to tomme felter på vægtskålen til højre.

Det kan gøres på flere måder – faktisk på uendeligt mange måder. Det er fristende at sørge for, at venstre vægtskål er lig med højre vægtskål for enhver værdi af x ved at tilføre højre vægtskål de $9x + 13$ der mangler for at nå op til venstre vægtskåls indhold på $14x + 18$.
Det kan fx gøres således:

$5x$	$9x$
13	5

hvor betingelsen ”blå kasser = orange kasser” medfører, at $x = \frac{18}{14} = \frac{9}{7}$. Det kan også gøres således:

$5x$	13
9x	5

hvor ”blå kasser = orange kasser” betyder, at $x = 2$.

Der er stadig uendeligt mange andre muligheder. For eksempel kan man for et vilkårligt valgt $x \in \mathbf{R}$, vælge tal a og b til højre vægtskål:

$5x$	a
b	5

således at de blå kasser tilsammen er halvdelen af venstre vægtskål:

$$5x + a = \frac{1}{2} \cdot (14x + 18) \quad \Leftrightarrow \quad a = 2x + 9$$

og de orange kasser tilsammen er lig med den anden halvdel af venstre vægtskål:

$$b + 5 = \frac{1}{2} \cdot (14x + 18) \quad \Leftrightarrow \quad b = 7x + 4$$

Indholdet af højre vægtskål kommer så til at se således ud:

$5x$	$2x + 9$
$7x + 4$	5

Opgave 22

A $\quad 100 \le x^2 \le 225 \quad \Leftrightarrow \quad 10 \text{ cm} \le x \le 15 \text{ cm}$

B $\quad \pi \cdot r^2 \le 628 \quad \Leftrightarrow \quad r \le \sqrt{\frac{628}{\pi}} \approx 14{,}14{,}\text{m}$

C $\quad$ Hvis det antal gange, Simone højst kan gå i biografen, betegnes x, har vi

$$95x + 1450 \le 1850 \quad \Leftrightarrow \quad x \le 4{,}2$$

Det betyder, at Simone højst kan gå i biografen 4 gange den pågældende måned.

D $\quad$ Om højden h skal gælde

$$h \cdot 24 \ge 408 \quad \Leftrightarrow \quad h \ge 17 \text{ cm.}$$

Opgave 23

A Ved 50 km/t fås: $d = 0{,}039 \cdot \frac{50^2}{3{,}4} \approx 28{,}68$ m.

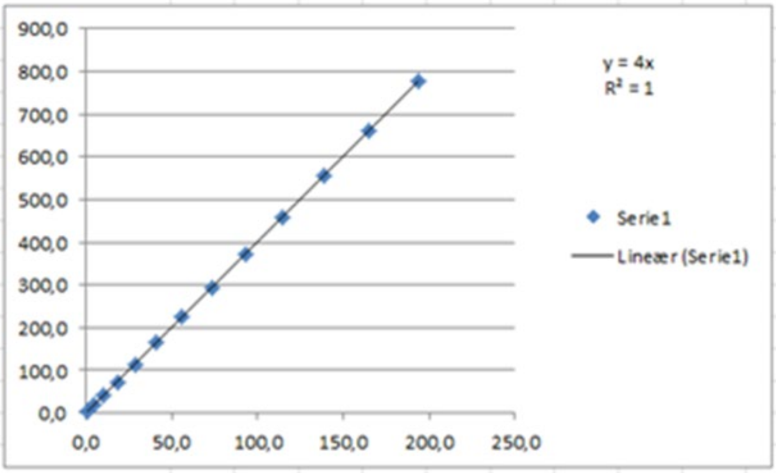
B Eleverne kan fx fremstille et regneark som dette:

D4 =0,039*D2^2/3,4

Hastighed i km/t:	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
Dobbelt hastighed:	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
Bremselængde 1 i meter:	1,1	4,6	10,3	18,4	28,7	41,3	56,2	73,4	92,9	114,7	138,8	165,2	193,9
Bremselængde 2 i meter:	4,6	18,4	41,3	73,4	114,7	165,2	224,8	293,6	371,6	458,8	555,2	660,7	775,4

Når man skal undersøge, hvordan bremselængden øges, når hastigheden fordobles, skal man sammenholde række 4 og 5 i arket. En lineær tendenslinje giver dette resultat:

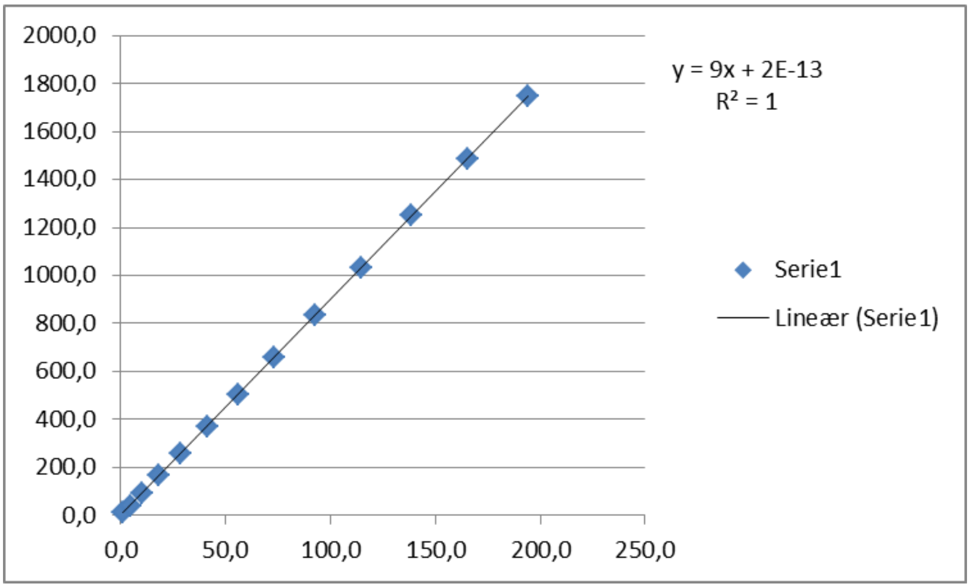
Hastighed i km/t:	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
Dobbelt hastighed:	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
Bremselængde 1 i meter:	1,1	4,6	10,3	18,4	28,7	41,3	56,2	73,4	92,9	114,7	138,8	165,2	193,9
Bremselængde 2 i meter:	4,6	18,4	41,3	73,4	114,7	165,2	224,8	293,6	371,6	458,8	555,2	660,7	775,4



Som man kan se, sker der det, at når farten fordobles, så firedobles bremselængden. Hvad er nu forbindelsen mellem fartforøgelsesfaktoren 2 og bremselængdeforøgelsesfaktoren 4? Er det 2 + 2, er det 2·2 eller er det 2^2?

Med andre ord: Hvis farten forøges med en faktor *k*, vil bremselængden da forøges med faktoren $k + 2$, $2k$ eller k^2? Hvis farten fx øges med en faktor 3, bliver bremselængden da forøget med en faktor 5, en faktor 6 eller en faktor 9?

Det kan vi undersøge ved at tredoble hastighederne i regnearket. Tendenslinjen bliver da denne:



Og da tallet ”2E-13” (2^{-13}) skal tolkes som 0 (nul), er tendensligningen derfor $y = 9x$. En tredobling af hastigheden giver således en nidobling af bremselængden. Når hastigheden vokser med en faktor k, vokser bremselængden altså med en faktor k^2.

C For at beregne, hvor langt bilen kører i reaktionstiden, vil vi omregne 50 km/t til m/s, og vi får da:

$$50 \text{ km/t} = \frac{50 \cdot 1000}{60 \cdot 60} \approx 13{,}89 \text{ m/s}$$

I reaktionstiden (2,0 sekunder) kører bilen altså 27,78 m. Vi har i spørgsmål A beregnet bremselængden ved 50 km/t til 28,48 m, så standselængden ved 50 km/t er altså 27,78 + 28,48 = 56,26 m.

D Da vurderingen af, hvad der er ”sikkert” i den beskrevne situation, uden tvivl vil variere, er dette ikke en opgave med et fast facit. Det væsentlige er derfor de overvejelser, eleverne gør sig.

En overvejelse (blandt mange) kunne være: ”Jeg vil sørge for, at jeg i reaktionstiden højst kører 30 meter”.

Ved hastigheden v km/t kører bilen $\frac{v \cdot 1000}{60 \cdot 60} = \frac{5}{18}v$ m/s. I løbet af reaktionstidens 2 sekunder kører bilen altså $2 \cdot \frac{5}{18}v = \frac{5}{9}v$ meter. Vi skal derfor løse uligheden

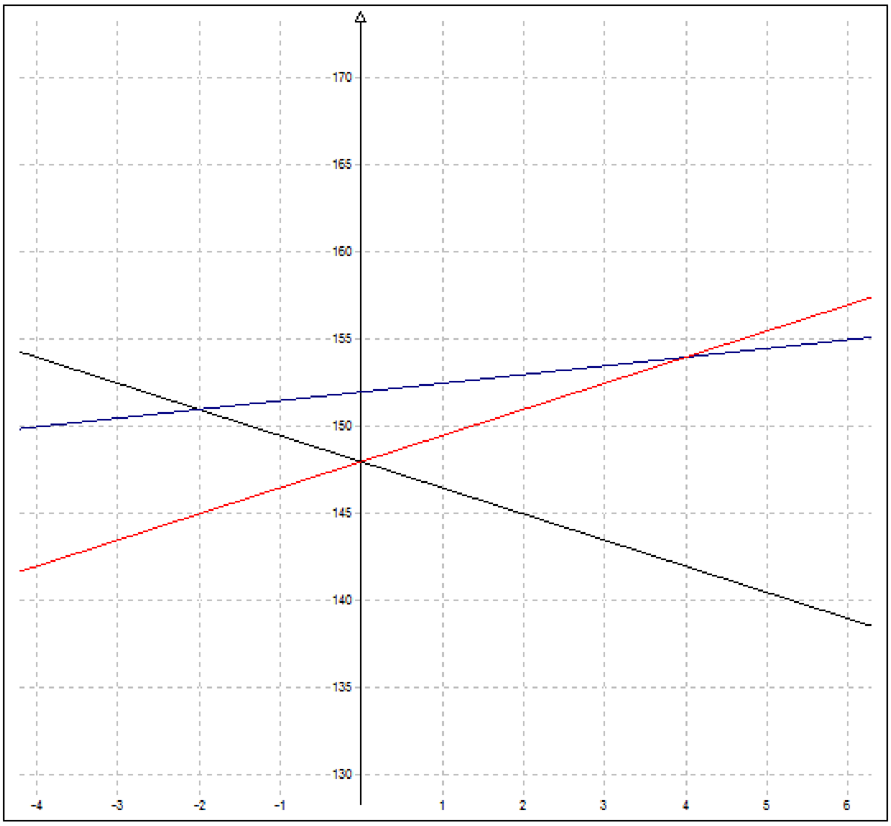
$$\frac{5}{9}v \leq 30 \qquad \Leftrightarrow \qquad v \leq 54$$

Ud fra denne beslutning om, hvad der er ”sikkert”, skal man altså højst køre 54 km/t.

FACIT SIDE 98-99

Opgave 24

A Tegning med digitalt værktøj af de tre linjer.



B Grafisk løsning af ligningerne

$$-1{,}5x + 148 = 0{,}5x + 152 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$

$$0{,}5x + 152 = 1{,}5x + 148 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

C Grafisk løsning af ulighederne

$$1{,}5x + 148 \geq -1{,}5x + 148 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0$$

$$-1{,}5x + 148 > 0{,}5x + 152 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2$$

Opgave 25

A-C Intet fast facit

Opgave 26

A-C Intet fast facit

Opgave 27

A-C Svarene afhænger af elevernes valg i opgaverne 25 og 26.

Opgave 28

Opgaven skal besvares med brug af et digitalt værktøj. Der er flere muligheder for valg, og herunder angives blot resultaterne til de enkelte delopgaver.

A Indholdet af maling (målt i liter) i de to kar er en funktion af det antal minutter hanen til karret er åben. I karret med rød maling er funktionen

$$R(x) = -x + 450$$

I karret med blå maling er funktionen

$$B(x) = -2{,}25x + 675$$

Karret med blå maling er tomt, når $B(x) = 0$ dvs. efter $\frac{675}{2{,}25} = 300$ minutter. På det tidspunkt er der $R(300) = 150$ L rød maling tilbage.

B Der er lige meget maling i begge kar, når $R(x) = B(x)$, dvs. for $x = 180$ – altså efter 180 minutter eller 3 timer.

C Karret med blå maling er tømt efter 300 minutter (spørgsmål A). Hvis karret med rød maling skal være tømt på samme tid, skal stigningstallet a_R i $R(x)$ indrettes således, at $a_R \cdot 300 + 450 = 0$, dvs. så $a_R = -\frac{450}{300} = -1{,}5$. Der skal altså løbe 1,5 L rød maling ud pr. minut, hvis de to kar skal være tømt på samme tid.

D Hvis begge kar skal være tømt efter 90 minutter, skal der om de to stigningstal a_R og a_B gælde

$$a_R \cdot 90 + 450 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_R = -5$$
$$a_B \cdot 90 + 675 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_B = -7{,}5$$

Der skal altså løbe 5 L rød maling og 7,5 L blå maling ud pr. minut, hvis de to kar skal være tømt samtidig.

Opgave 29

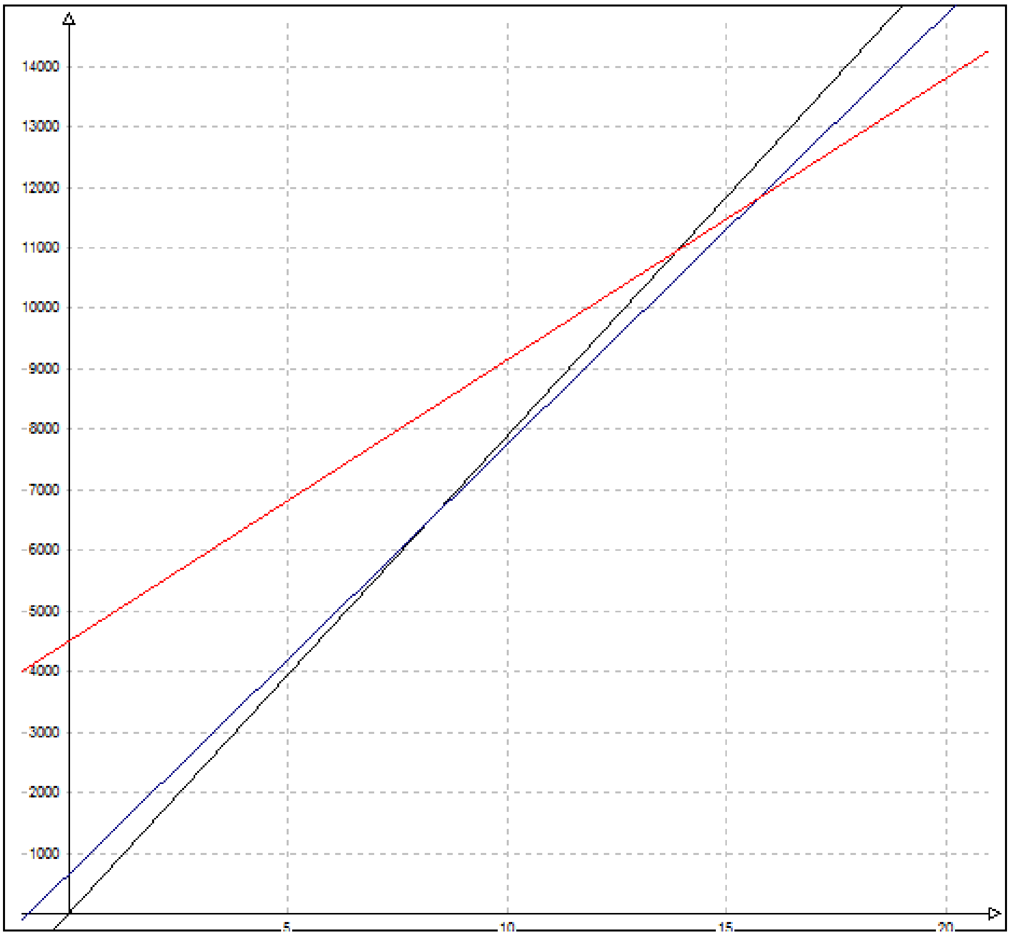
A Økobutikken: $P_Ø(x) = (751 + 38) \cdot x = 789x$

Supermarkedet: $P_S(x) = 710x + 650$

Netbutikken: $P_N(x) = 465x + 4500$

B Man må gå ud fra, at der skal bestilles måltidskasser til et helt antal uger, hvorfor x skal være et naturligt tal. Man kan selvfølgelig også helt lade være med at bestille måltidskasser, dvs. tallet 0 må også høre med til definitionsmængden., der således – generelt set – bliver mængden $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Da Ingrids familie vil afprøve måltidskasser i 20 uger, bliver den definitionsmængde, de er interesseret i, mængden $\{0, 1, 2, \ldots, 19, 20\}$.

C Grafer.



D Økoprisen overstiger prisen for supermarkedet, når

$789x > 710x + 650$

Netbutikken ligger under prisen for supermarkedet, når

$465x + 4500 < 710x + 650$

E $789x > 710x + 650 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{650}{79} \approx 8{,}2$, dvs. for $x \geq 8$.

$465x + 4500 < 710x + 650 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{3850}{245} \approx 15{,}7$, dvs. for $x \geq 16$.

F Økobutikken bliver dyrere end Netbutikken, hvis man køber måltidskasser i 14 uger eller mere.

G Den samlede pris for 20 ugers forbrug af de tre tilbud er:

$P_Ø(20) = 15.780$ kr.

$P_S(20) = 14.850$ kr.

$P_N(20) = 13.800$ kr.

H Der leveres i alt 20·4·4 = 320 måltider de 20 uger. Prisen pr. måltid bliver derfor

Økobutikken: 49,31 kr.

Supermarkedet: 46,41 kr.

Netbutikken: 43,13 kr.

FACIT SIDE 100 -101

Opgave 30

A Løsningen er $(x, y) = (4, 1)$.

B Løsningen er $(x, y) = \left(17\frac{1}{2}, 20\frac{1}{2}\right)$.

Opgave 31

A Grafisk løsning af tre ligningssystemer. Her angives blot løsningerne.

I: $(x, y) = \left(\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}\right)$

II: $(x, y) = \left(3\frac{1}{2}, 10\frac{1}{2}\right)$

III: $(x, y) = (t, -2t + 5)$; $t \in \mathbf{R}$.

B Hvis der

- ingen løsninger er, vil linjerne være parallelle men adskilte (forskellige).
- er netop én løsning, skærer linjerne hinanden i netop ét punkt.
- er uendeligt mange løsninger, er linjerne parallelle og sammenfaldende (samme linje).

Opgave 32

A Hvis antallet af centicubes i figur nr. n i figurfølgen 'Korset' betegnes Ko_n gælder

$Ko_n = 3n + 3$

B Hvis antallet af centicubes i figur nr. n i figurfølgen 'Krydset' betegnes Kr_n gælder

$Kr_n = 4n - 3$

C Der bruges lige mange centicubes i figur nummer n, hvor n er løsning til ligningen

$3n + 3 = 4n - 3$

Det sker i figur nr. 6.

Opgave 33

A Et muligt ligningssystem er

$2(x + y) = 24$

$x = 3y$

B Sidelængderne er $x = 9$ og $y = 3$.

Opgave 34

A De to tal kaldes x og y:

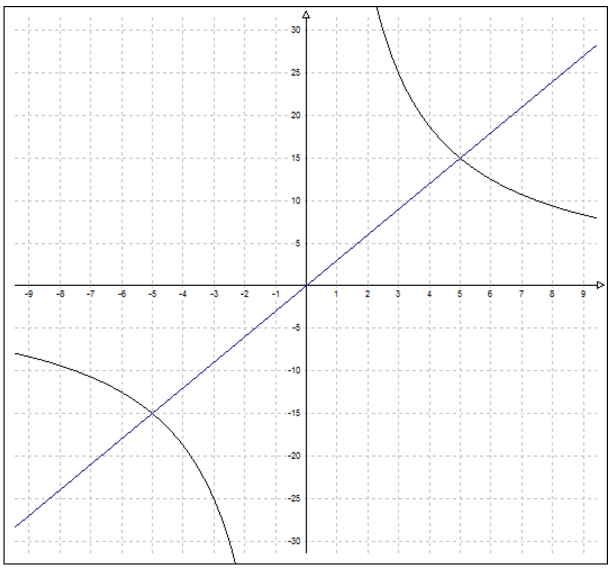
Produktet er 75: $xy = 75$

Det ene tal er tre gange så stort som det andet; $y = 3x$

B Grafer /til højre):

Løsningerne er $(x, y) = (-5, -15)$ og $(x, y) = (5, 15)$.

C Der er to løsninger, fordi graferne skærer hinanden i to punkter.



Opgave 35

A Antallet af solgte billetter til

4.-5. klasse betegnes *x*.

7.-9. klasse betegnes *y*.

Der gælder da

$$40x + 55y = 13.140$$

$$y = x + 23$$

B Løsningen til ligningssystemet er (x, y) = (125, 148). Der er altså solgt 125 billetter til 4.-5. klassernes fest og 148 billetter til 7.-9. klassernes fest.

FACIT SIDE 102-103

TEMA: ANDENGRADSLIGNINGEN

DEL 1

A

- $a = -1$, $b = 3$, $c = 4$
- $a = 2$, $b = -8$, $c = 8$
- $a = 0{,}5$, $b = 0$, $c = -8$
- $a = 1$, $b = -5$, $c = 0$

B Ligningen $-x^2 + 3x + 4 = 0$ har 2 løsninger: $x = -1 \vee x = 4$.
Ligningen $2x^2 - 8x + 8 = 0$ har 1 løsning: $x = 2$.
Ligningen $0{,}5x^2 - 8 = 0$ har 2 løsninger: $x = -4 \vee x = 4$.
Ligningen $x^2 - 5x = 0$ har 2 løsninger: $x = 0 \vee x = 5$.

DEL 2

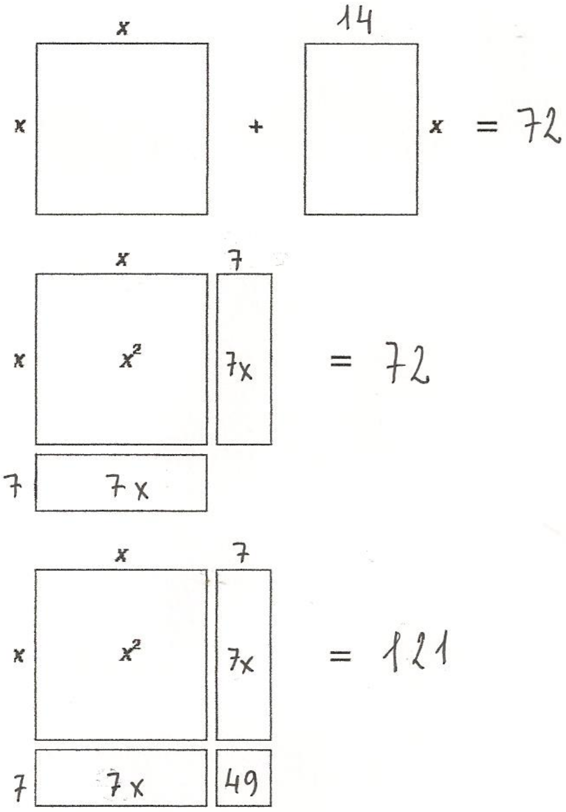
A-B Elevforklaringer

C Løsningen er $x = -13 \vee x = 3$.
For al-Khwarizmi var løsningen længden af et linjestykke, og et linjestykke kan ikke have negativ længde.

D Løsning af ligninger med al-Khwarizmis metode.

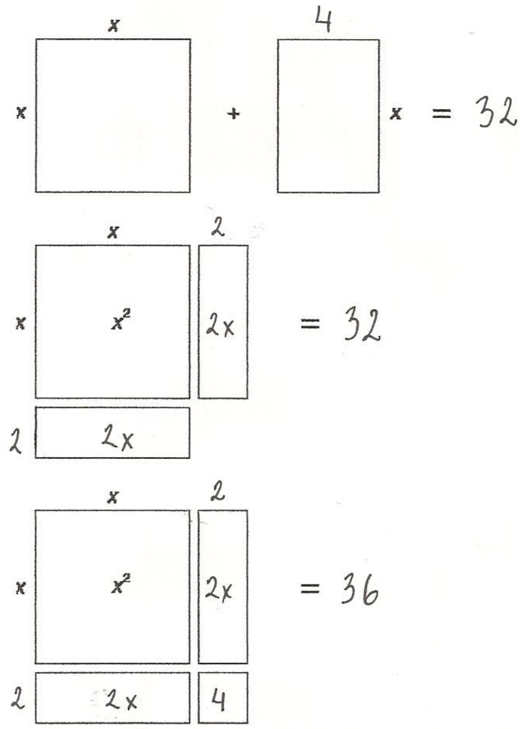
$x^2 + 14x = 72$:

$x + 7 = 11$, så siden i det kvadrat, vi leder efter, er 4.
Den negative rod ($x = -18$) opdager metoden ikke.



$x^2 + 4x = 32$:

$x + 2 = 6$, så siden i det kvadrat, vi leder efter, er 4.
Den negative rod ($x = -8$) opdager metoden ikke.

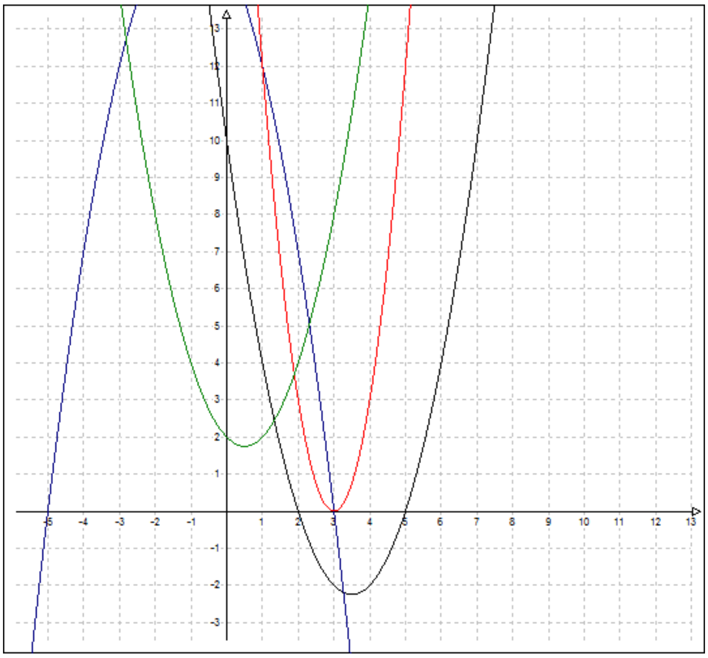


DEL 3

A

- $x = 2 \vee x = 5$
- $x = -5 \vee x = 3$
- $x = 3$
- $x \in \emptyset$ (dvs. der er ingen løsning)

B Grafer:



Graferne viser (naturligvis) de samme løsninger som formlen giver.

EVALUERING

DEL 1 – DEL 2

Elevaktiviteter. Eleverne forklarer betydningen af de begreber, de har lært om.

DEL 3

A $h = \frac{3V}{\pi r^2}$

B $r = \sqrt{\frac{3V}{h \cdot \pi}}$

DEL 4

Eleverne skal forklare de regler de bruger til at løse ligningerne og ulighederne. Her angives blot løsningerne.

A $x = 6$

B $x = -5$

C $x \leq 2\frac{1}{3}$

D $x < 1$

E $x = -1 \vee x = \frac{1}{2}$

F $x = -1 \vee x = 1$

G Løsninger til C og D vises på forskellig måde.

H Elevforklaring

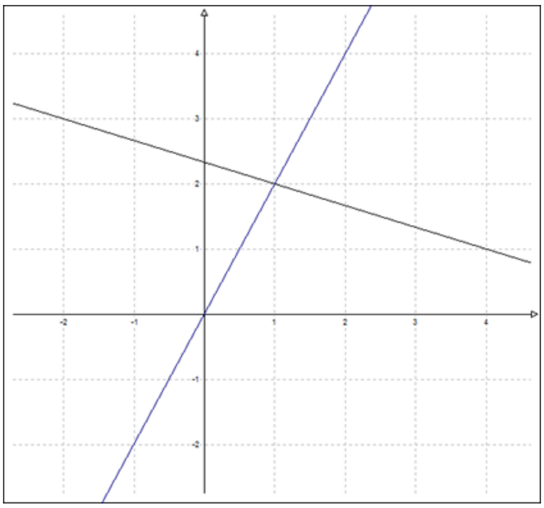
DEL 5

A-B Løsning af ligninger og uligheder fra DEL 4 med forskellige digitale hjælpemidler.

DEL 6

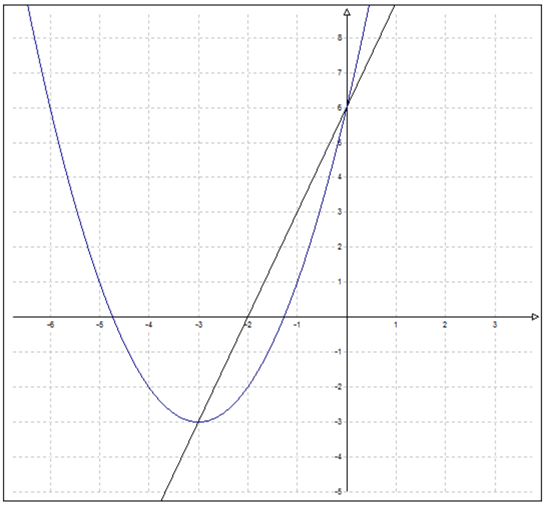
Ligningssystemerne løses grafisk og algebraisk. Her vises graferne, og løsningerne angives.

A



Løsning: $(x, y) = (1, 2)$.

B



Løsning: $(x, y) = (-3, -3) \vee (x, y) = (0, 6)$.

FACIT SIDE 104-105

TRÆN 1 – FÆRDIGHEDER

Opgave 1

A	$10a + 9b$
B	$3b^2 - 18ab - 13a$
C	$a^2 - b^2 + 2ab$
D	$4a^2 - 8b^2 + 4ab$

Opgave 2

A	$x = 6$	
B	$x = 27$	
C	$x = \frac{2}{5}$	(= 0,4)

Opgave 3

A

- $h = 2x - 3$
- $h = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$
- $h = 40x$

B Uden at regne kan man se, at når x er negativ, vil værdien $-\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ være størst.
For $x = -3$ fås her $h = 1\frac{2}{3}$.
De to øvrige værdier af h giver $h = -9$ og $h = -120$.

Opgave 4

A	$h = \frac{2A}{a+b}$
B	$a = \frac{2A}{h} - b$
C	$h = \frac{2 \cdot 19{,}5}{5+8} = 3$ cm.
D	$a = \frac{2 \cdot 95}{10} - 11 = 8$ cm.

Opgave 5

A	$O = 14a + 6b$
B	$A = 15ab - 2a^2$

Opgave 6

A	$x = 2$	
B	$x < 2$	$]-\infty; 2[$
C	$x > 2$	$]2; \infty[$
D	$x \leq 2$	$]-\infty; 2]$
E	$x \geq 2$	$[2;\infty[$
F	Intervallerne er anført under pkt. B-E.	

Opgave 7

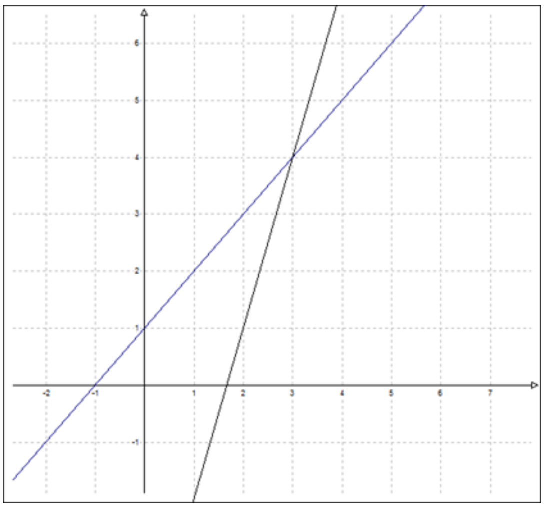
A $(x, y) = (3, 4)$

B $(x, y) = \left(-1\frac{2}{3}, 9\frac{2}{3}\right)$

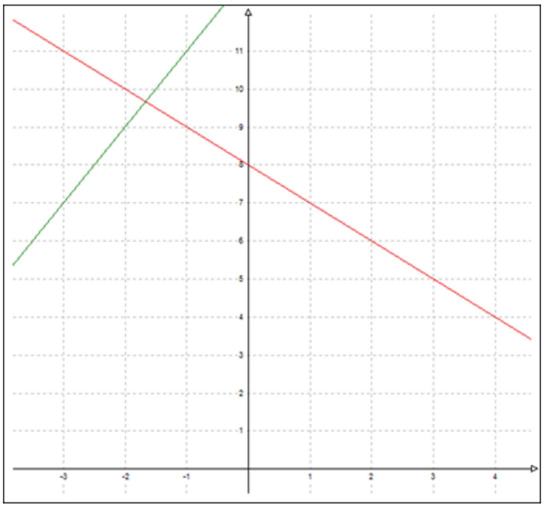
Opgave 8

A Grafisk løsning af opgave 7.

$y = 3x - 5$
$y = x + 1$



$y = -x + 8$
$y = 2x + 13$



TRÆN 2 – FÆRDIGHEDER

Opgave 1

A $2a - 2b$

B $-5a + 9b$

C $a^2 + 9b^2$

Opgave 2

A $x = -1$

B $x = 134$

C $x = -\frac{1}{2}$

Opgave 3

A Elevforklaring.

Et tal i 3-tabellen kan skrives $3 \cdot p$, hvor $p \in \mathbb{Z}$. Tallet $3n + 6$ kan omskrives til

$$3n + 6 = 3 \cdot (n + 2)$$

Her er $n + 2$ et helt tal – altså er $3n + 6$ et tal i 3-tabellen.

B Elevforklaring.

Uligheden $4n + 3 \geq 3n + 4$ er ensbetydende med uligheden $n \geq 1$, der jo er opfyldt for alle naturlige tal n.

C $s = 51 - 2n$

Elevforklaring.

Tallet $2n$ er lige, tallet s er altså differensen mellem et ulige tal og et lige tal – og dermed ulige.

Opgave 4

A

- $h = \frac{3V}{\pi r^2}$
- $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$

B $h = \frac{3 \cdot 94{,}2}{\pi \cdot 3^2} = 9{,}99$ cm.

C $r = \sqrt{\frac{3 \cdot 565{,}5}{\pi \cdot 15}} = 6{,}00$ cm.

Opgave 5

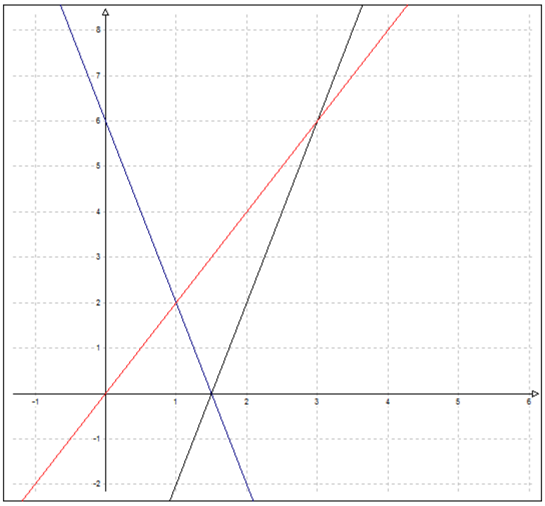
Radius i den ene halvcirkel er $\frac{x}{2}$, og radius i den anden er $\frac{5-x}{2}$. Vi får da:

A $O = 2\pi \cdot \frac{x}{2} + 2\pi \cdot \frac{5-x}{2} = 5\pi$

B $A = x \cdot (5 - x) + \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{5-x}{2}\right)^2 = 5x - x^2 + \pi \cdot \frac{2x^2 - 10x + 25}{4}$

Opgave 6

A Grafer:



B Lidt bemærkninger til 2 af opgaverne i dette punkt. Den sidste opgave

$$-4x + 6 \leq 2x \leq 4x - 6$$

er en såkaldt *dobbeltulighed*. Den er logisk ækvivalent med konjunktionen

$$-4x + 6 \leq 2x \quad \wedge \quad 2x \leq 4x - 6$$

Her kaldes $-4x + 6 \leq 2x$ for venstre ulighed og $2x \leq 4x - 6$ kaldes højre ulighed. Hvis L_V er løsningsmængden til venstre ulighed, og L_H er løsningsmængden til højre ulighed, er det altså fællesmængden $L_V \cap L_H$, der er løsningsmængde til dobbeltuligheden. Med andre ord de x'er, der er løsninger til både venstre og højre ulighed, er løsninger til dobbeltuligheden.

Opgave nr. 3 ser således ud:

$$4x - 6 = 2x = -4x + 6$$

Man kunne fristes til at kalde det en "dobbeltligning", men den glose findes ikke i sproget, ligesom skrivemåden med to lighedstegn heller ikke normalt anvendes. Den er her blot medtaget som oplæg til en snak om lighedstegnets betydning. Meningen er, at man skal finde de tal x, der giver alle 3 udtryk samme værdi – hvis sådanne tal findes. Som ved dobbeltuligheden kan man opløse i en venstre ligning og en højre ligning. Løsningen er så de tal, der passer i begge ligninger.

Løsningerne er:

- $x = 1\frac{1}{2}$
- $x = 1$
- $x \in \emptyset$ — Ingen løsning. Venstre ligning har løsningen $x = 3$. Højre ligning har løsningen $x = 1$. Da $1 \neq 3$ er der ingen løsning.
- $x \geq 1\frac{1}{2}$ — $\left[1\frac{1}{2}; \infty\right[$
- $x < 3$ — $]-\infty; 3[$
- $x \leq 1$ — $[-\infty; 1]$
- $x \geq 3$ — $[3;\ \infty[$

  Løsningen til venstre ulighed er $x \geq 1$, løsningen til højre ulighed er $x \geq 3$. De tal, der både er ≥ 3 og ≥ 1. er de, der er større end eller lig med 3.

C Intervallerne er anført ved ulighedsløsningerne i punkt B.

Opgave 7

A $(x, y) = (2, -4)$

B $(x, y) = \left(3\frac{1}{5}, 1\frac{1}{5}\right)$

Opgave 8

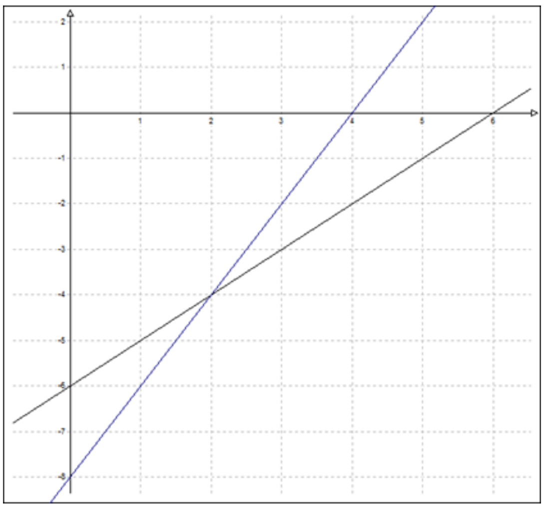
A Grafisk løsning af ligningssystemerne fra opgave 7. Bemærk, at ligningerne er omskrevet til formen $y = ax + b$. Bemærk også, at da hældningskoefficienterne for linjerne i B ligger tæt på hinanden, er det næppe muligt at aflæse skæringspunktets koordinatsæt med stor sikkerhed.

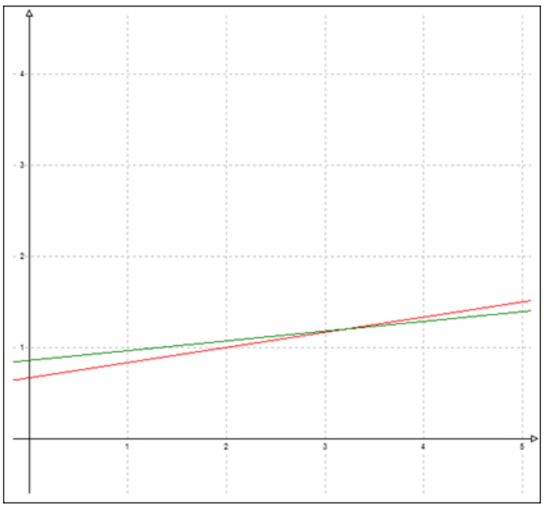
$$y = x - 6$$

$$y = 2x - 8$$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{3}{28}x + \frac{6}{7}$$





FACIT SIDE 106-107

TRÆN 1 – PROBLEMLØSNING

Opgave 1

A Vands frysepunkt er 32 °F.

B Vands kogepunkt er 212 °F.

C 37 °C svarer til 98,6 °F.

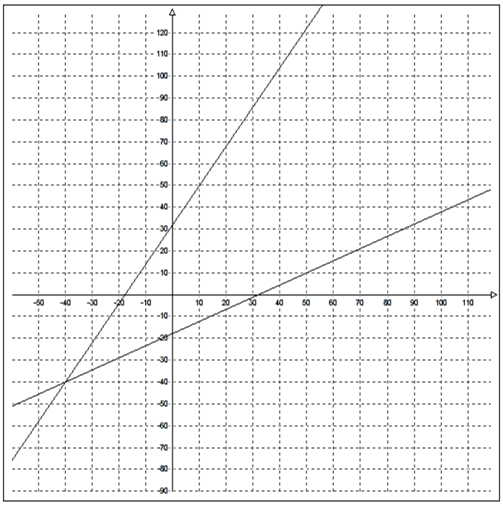
D En funktion, der viser sammenhængen mellem °C og °F, kan enten vise temperaturen i °F ($F(x)$) som funktion af temperaturen x i °C, eller den kan vise temperaturen i °C ($C(x)$) som funktion af temperaturen x i °F. De to funktioner er

$$F(x) = 1{,}8x + 32$$

og

$$C(x) = \frac{x-32}{1{,}8}$$

Graferne er tegnet her:



E Den søgte formel er beregnet i spørgsmål F:

$$°C = \frac{°F-32}{1{,}8}$$

F 215 °F svarer til $\frac{215-32}{1{,}8}$ = 101,7 °C.

Opgave 2

A Tabel:

Ring nr.	Basis	1	2	3	4
Antal sekskanter i den yderste ring	1	6	12	18	24

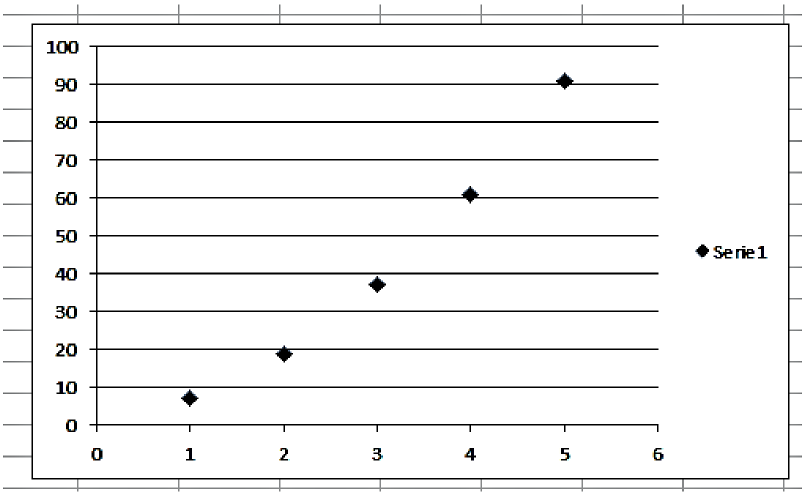
B I ring nr. n er der $6n$ sekskanter.

C I første oplag af MULTI 9 er der en trykfejl, idet ordet ”ring” skal erstattes af ordet ”figur” i såvel spørgsmål C som spørgsmål E.

Det samlede antal sekskanter i figur 1 til figur 5 er da:

Figur nr.	1	2	3	4	5
Antal sekskanter	7	19	37	61	91

D Grafen er en punktgraf med de naturlige tal **N** som definitionsmængde. Den er her tegnet (for *n* = 1, 2, ..., 5) i Excel. Bemærk, at der er forskellige enheder på akserne.



E Det samlede antal sekskanter – inkl. basissekskanten – i figur nr. *n* er:

$1 + 6 + 2\cdot 6 + 3\cdot 6 + \ldots + n\cdot 6$

$= 1 + 6\cdot(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$

$= 1 + 6 \cdot \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

$= 3n^2 + 3n + 1$

Eleverne har tidligere (MULTI 8) arbejdet med en formel for summen af de første *n* naturlige tal ($1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$), men skal nok mindes om den, hvis de vil gå denne vej. En anden mulighed er at bruge polynomial regression. Det vil også give udtrykket.

F I figur nr. 10 er der $3\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 1 = 331$ sekskanter.

G Idet $3\cdot 12^2 + 3\cdot 12 + 1 = 469$ består figur nr. 12 af netop 469 sekskanter, og der kan derfor dannes 12 ringe af 469 sekskanter.

Opgave 3

A Antal colaer betegnes *x* og antal sportsvand betegnes *y*. Der gælder da:

$x + y = 70$

$12x + 11y = 810$

B Ligningssystemets løsning er $(x, y) = (40,30)$.

9. Z køber altså 40 colaer og 30 sportsvand.

Opgave 4

A LejBil: $y = 2{,}25x + 1650$

NemBil: $y = 1{,}75x + 2025$

B De to tilbud er lige dyre for

$$2{,}25x + 1650 = 1{,}75x + 2025 \quad \Leftrightarrow$$
$$x = 750$$

Hvis Peter på forhånd ved, at han kommer til at køre nøjagtigt 750 km, er det med andre ord ligegyldigt rent økonomisk, hvilket firma han benytter.

C Peter skal samlet betale

Hos LejBil: $2{,}25 \cdot 855 + 1650 = 3.573{,}75$ kr.

Hos NemBil: $1{,}75 \cdot 855 + 2025 = 3.521{,}25$ kr.

D LejBil er billigst i kilometerintervallet [0; 750[.

E NemBil er billigst i kilometerintervallet]750; ∞[.

TRÆN 2 – PROBLEMLØSNING

Opgave 1

A Indsætter vi tallene fra elkedlen i Ohms lov, får vi:

$$230 = R \cdot 6$$

Heraf fås modstanden til 230 : 6 = 38,33 Ω.

B Strømstyrken I må ikke overstige 13 ampere, dvs. spændingen U og modstanden R skal opfylde

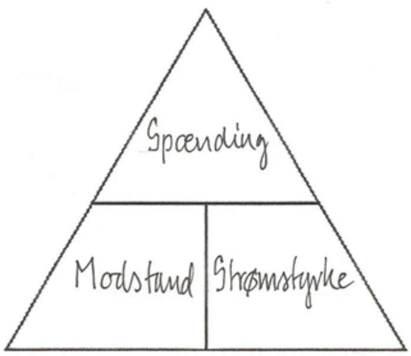
$$\frac{U}{R} \leq 13$$

Da U = 230 volt, skal modstanden R altså opfylde

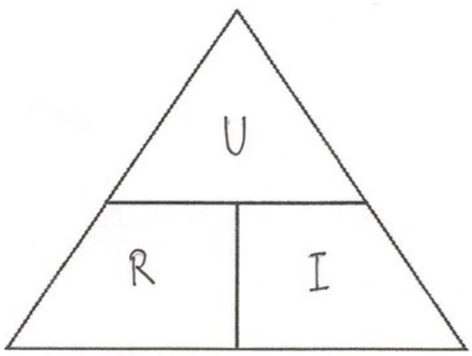
$$\frac{230}{R} \leq 13 \quad \Leftrightarrow$$
$$R \geq \frac{230}{13} = 17{,}7\ \Omega$$

C Den omtalte "husketrekant" ser således ud:

med tekst



med variable



Elevforklaring til brugen af husketrekanten.

Se evt. forklaringen til opgave 11 side 92.

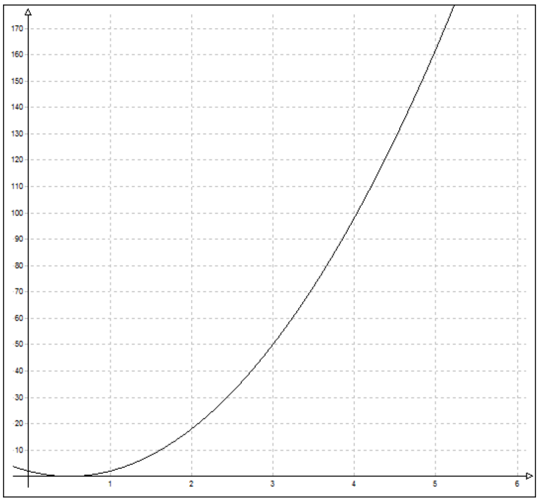
Opgave 2

A

Figurnummer	1	2	3	4	5	6
Omkreds	4	12	20	28	36	44

B Sidelængden i figur nr. n er $2n - 1$, og omkredsen O bliver derfor $4 \cdot (2n - 1) = 8n - 4$.

C Grafen er en punktgraf, idet funktionens definitionsmængde er de naturlige tal **N**. Her er grafen imidlertid tegnet med Dm(f) = **R.**



D I figur nr. 8 er

$$B_8 = 8 \cdot 8^2 - 8 \cdot 8 + 2 = 450 \text{ basistrekanter.}$$

E For at finde figuren med 882 basistrekanter kan man finde den positive rod til ligningen

$$8n^2 \cdot 8n + 2 = 882$$

Ligningen har løsningerne –10 og 11, så svaret er, at den figur, der indeholder 882 basistrekanter er figur nr. 11.

Eleverne kan også gætte og prøve efter, eller de kan fremstille en tabel som i spørgsmål F.

F Vi ved, at de søgte figurnumre er større end 11, så vi kunne fx fremstille en tabel (regneark) som denne:

B2 =8*B1^2-8*B1+2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Figur nr.	12	13	14	15	16	17	18
2	Antal basistrekanter:	1058	1250	1458	1682	1922	2178	2450

Af tabellen ses, at de figurer, der indeholder mellem 1200 og 1500 basistrekanter, er nr. 13 og 14.

Opgave 3

A

$$C + L = 300$$
$$3{,}5C + 2{,}5L = 975$$

Ligningssystemet har løsningen (C, L) = (225, 75), dvs. Sanne køber 225 chokoladekarameller og 75 lakridskarameller.