Geometri og måling - Facitliste

En del opgaver i dette kapitel er formuleret, så der ikke er noget kanonisk facit, da resultatet på forskellig måde afhænger af elevens valg. Til disse opgaver anføres ofte blot "Intet fast facit" eller lignende.

FACIT SIDE 108-109

Opgave 1

A Elevernes definitioner af de fem firkanttyper. For eksempel:

Rektangel:	En firkant hvor alle fire vinkler er rette.
Kvadrat:	En firkant hvor alle vinkler er rette, og alle sider er lige lange.
Parallelogram:	En firkant hvor de modstående sider er parallelle.
Rombe:	En firkant hvor alle sider er lige lange.
Trapez:	En firkant hvor netop ét par af modstående sider er parallelle.

Dette er de mest almindeligt anvendte definitioner af disse fem firkanttyper. Bemærk dog, at der kan findes flere forskellige rigtige definitioner af den samme firkanttype. Blandt andet kan den rækkefølge, definitionerne kommer i, spille ind. Hvis man fx definerer rektangel før kvadrat, kan et kvadrat defineres som et rektangel med lige lange sider. Og definerer man rombe før kvadrat kan et kvadrat defineres som en rombe med rette vinkler.

Sædvanligvis vil man dog i matematik være på vagt overfor "overdefinitioner", dvs. definitioner, som kræver mere end det er nødvendigt af et begreb. Hvis man fx definerer et rektangel som en firkant, hvor alle fire vinkler er rette og modstående sider er lige lange, har man en "overdefinition". At de modstående sider i et rektangel er lige lange, er en logisk følge af, at alle fire vinkler er rette. Det er derfor en *sætning* om rektangler og ikke en del af definitionen.

B Eleverne bytter definitioner og tegner firkanterne ud fra definitionerne/beskrivelserne.

C Tegning af hver type firkant med omkreds 16 cm. Den eneste af firkanterne, som er entydigt bestemt ud fra den beskrivelse, er kvadratet, der skal have en sidelængde på 4 cm.

D Tegning af hver type firkant med areal 16 cm^2. Igen er den eneste af firkanterne, som er entydigt bestemt ud fra den beskrivelse, kvadratet, der atter skal have en sidelængde på 4 cm.

Opgave 2

A Arealet af midterøen er $\pi \cdot 13^2 \approx 530{,}93$ m^2.

B Der skal lægges granitsten langs omkredsen af en cirkel med radius 14 m, dvs. i alt på $2 \cdot \pi \cdot 14 = 87{,}96$ m.
Da det koster 586 kr. pr. løbende meter, bliver prisen i alt
$87{,}96 \cdot 586 \approx 51\,545$ kr. (51 544,56 kr.).

C Den mængde jord, der skal bruges til keglen, svarer til keglens rumfang og rumfanget af den omtalte kegle er $V = \frac{1}{3} \cdot 1{,}75 \cdot \pi \cdot 6^2 \approx 65{,}97$ m^3.
Der skal altså bruges ca. 66 m^3 jord til keglen.

D Den krumme overflade af en kegle med højde *h* og grundfladeradius *r* er
$O = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$
Der skal derfor sås græs på $\pi \cdot 6 \cdot \sqrt{6^2 + 1{,}75^2} = 117{,}8$ m^2.

E Der skal sås græs på $\pi \cdot 13^2 - \pi \cdot 6^2 \approx 417{,}83$ m^2.

Opgave 3

A Radius i de to halvcirkler er 2,5 m. Rumfanget *V* af poolen er da:
$V = 1{,}5 \cdot (\pi \cdot 2{,}5^2 + 6 \cdot 5) \approx 74{,}45$ m^3

B Rumfanget af vandet er
$V_1 = 1{,}35 \cdot (\pi \cdot 2{,}5^2 + 6 \cdot 5) \approx 67{,}00$ m^3

C Det koster
$67 \cdot 51{,}19 = 3429{,}73$ kr. at fylde poolen.

D At fylde poolen tager
$67\,000 : 22 = 3045{,}45$ minutter $\approx$ 50 timer, 45 minutter.

Opgave 4

A Hvis stigens længde betegnes *l*, gælder
$\sin(15°) = \frac{1{,}8}{l} \quad \Leftrightarrow$
$l = \frac{1{,}8}{\sin(15°)} \approx 6{,}95$ m

B Højden op ad muren betegnes *h*. Vi har da
$\tan(15°) = \frac{1{,}8}{h} \quad \Leftrightarrow$
$h = \frac{1{,}8}{\tan(15°)} \approx 6{,}72 \text{ m}$

Opgave 5

A Elevbeskrivelse af grundfiguren.
Grundfiguren afgrænses af en halvcirkel og to kvartcirkler alle med halvdelen af kvadratets sidelængde som radius.

B Elevtegning af mønsteret. Eleverne kan vælge at tegne et udsnit af mønsteret "i hånden" med klassiske hjælpemidler som passer og lineal, eller de kan vælge at bruge et it-værktøj som fx GeoGebra.

C Beskrivelse af flytninger. Når der skal bestemmes flytninger i mønsteret skal man se bort fra farverne.

FACIT SIDE 110-111

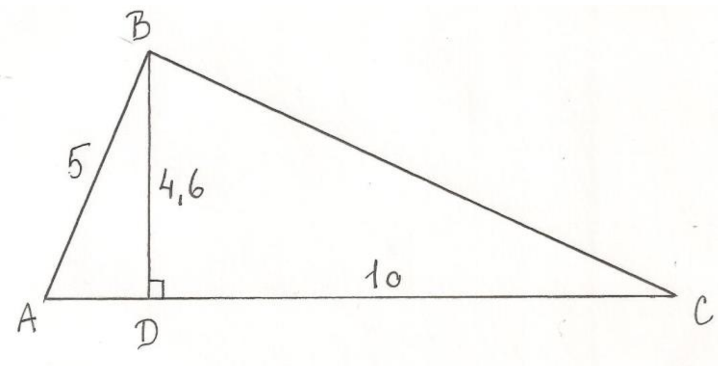
Opgave 6

A

Figur 1: Omkreds: $O = 2\pi \cdot 3 = 6\pi \approx 18{,}85$ m.
Areal: $A = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \approx 28{,}27$ m^2.

Figur 2: Omkreds: $O = 2 \cdot (3{,}16 + 5) = 16{,}32$ m.
Areal: $A = 3 \cdot 5 = 15$ m^2.

Figur 3: Vi navngiver figuren således:



Højden *BD* deler trekanten i to retvinklede trekanter.
Pythagoras på trekant *ABD* giver $|AD| = \sqrt{5^2 - 4{,}6^2} = \sqrt{3{,}84} \approx 1{,}86$ m.
Pythagoras på trekant *BCD* giver $|BC| = \sqrt{10^2 + 4{,}6^2} = \sqrt{121{,}16} \approx 11{,}01$ m.
Vi får da:

Omkreds: $O = 5 + 11{,}01 + 10 + 1{,}86 = 27{,}97$ m.
Areal: $A = \frac{1}{2} \cdot 11{,}96 \cdot 4{,}6 = 27{,}51$ m^2.

Figur 4: Omkreds:
Radius i kvartcirklen er 6 – 4 = 2 dm.
Omkredsen bliver da
$$O = 4 + 4 + 6 + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 + 2 = 16 + \pi \approx 19{,}14 \text{ dm}.$$
Areal: $A = 4^2 + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 \approx 19{,}14$ dm^2

Figur 5: Omkreds: $O = 5 \cdot 10 = 50$ cm.
Areal: $A = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6{,}7 = 167{,}5$ cm^2.

Figur 6: Omkreds: $O = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6 \approx 56{,}55$ dm.
Areal: $A = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 6^2 + 6^2 \approx 205{,}65$ dm^2.

Opgave 7

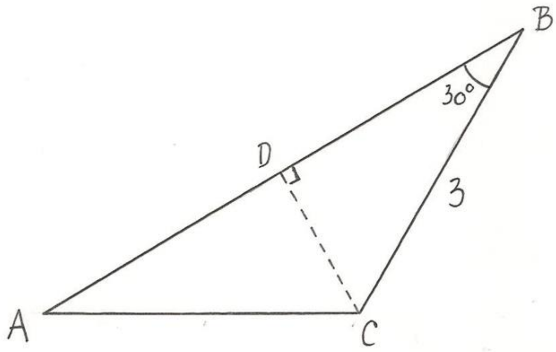
A

- Da trekanterne er ligesidede, er hver vinkel i dem 60°.
- Alle sekskantens vinkler er nabovinkel til en trekantvinkel og måler derfor 180° – 60° = 120°.

B Elevtegning med digitalt værktøj.

C Trekant *ABC* er ligebenet ($|AC|$ = $|BC|$), og $\angle C$ = 120° (jf. punkt A).
Vinkel *B* (og vinkel *A*) er derfor $\frac{180°-120°}{2} = 30°$.

D Trekant *ABC* kan deles i to retvinklede trekanter ved højden fra *C*.



Vi har da: $\cos(30°) = \frac{|BD|}{3} \quad \Leftrightarrow \quad |BD| = 3 \cdot \cos(30°)$

Da trekant *ABC* er ligebenet med C som toppunkt, er højden fra *C* også midtnormal, så den søgte længde $|AB|$ er det dobbelte af $|BD|$. Vi får derfor

$$|AB| = 6 \cdot \cos(30°) = 6\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 5{,}20.$$

E Vi betragter trekant *ABO*. Da *O* er centrum for sekskantens omskrevne cirkel er $|AO|$ og $|BO|$ begge lig med radius i denne cirkel og dermed lige store. Da også den grønne sekskant er regulær er vinkel *0* i trekanten lige med $\frac{360°}{6}$ = 60°. De to andre vinkler ($\angle A$ og $\angle B$) i trekanten er lige store, og dermed også lig med 60°. Trekanten er med andre ord ligesidet, dvs. $|BO| = |AB| = 6\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 5{,}20$.

F Arealet af den blå stjerne kan beregnes på flere måder, fx som arealet af en ”stor” ligesidet trekant plus tre gange arealet af en ”lille” ligesidet trekant.
Arealet af en ligesidet trekant med siden *s* kan (fx ved hjælp af Herons formel) bestemmes til A = $\frac{s^2}{4} \cdot \sqrt{3}$. Da sidelængden i den store ligesidede trekant er 9, og sidelængden i de små ligesidede trekanter er 3, bliver arealet af den blå stjerne:

$$A = \frac{9^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \frac{3^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 27\sqrt{3} \approx 46{,}77.$$

Opgave 8

A Elevtegning af figuren med et digitalt værktøj.

B Længden af den røde halvcirkel kan måles eller beregnes. Længden er

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1{,}5 = 1{,}5\pi \approx 4{,}71.$$

C Længden af den blå halvcirkel skal beregnes:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 = 3\pi \approx 9{,}\ 42.$$

D Omkredsen af det blå område er sammensat af

En halv cirkelperiferi med radius 1,5:	$1{,}5\pi$
En halv cirkelperiferi med radius 3:	3π
En halv cirkelperiferi med radius 4,5:	$4{,}5\pi$
I alt:	9π – som ønsket.

E Arealet af det røde område svarer til arealet af en cirkel med radius 3 minus arealet af en cirkel med radius 1,5, altså

$$\text{Areal(rød)} = \pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 1{,}5^2 = 6{,}75\pi \approx 21{,}21.$$

Opgave 9

A Elevtegning af figuren med et digitalt værktøj.

B En rombe er en firkant, hvor alle fire sider er lige lange. De fire sider i *ABCD* er alle radier i de to kongruente cirkler og dermed lige lange.
Altså er *ABCD* en rombe, hvilket skulle vises.

C Da cirklerne er kongruente (samme radius), og da fx højre cirkel har centrum på venstre cirkels periferi (i *B*), går hver cirkel gennem den anden cirkels centrum. Kalder vi den fælles radius for *r*, gælder altså $|AB| = |AD| = r$. De to trekanter *ABD* og *BCD* er med andre ord ligesidede. Derfor er alle trekantens vinkler 60°.
Altså har vi

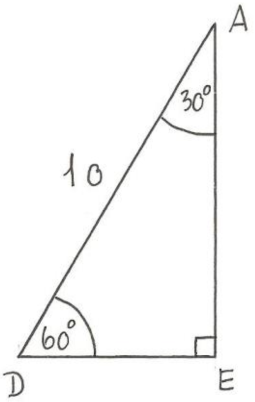
$$\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$$

og

$$\angle ABC = \angle CDA = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

hvilket skulle bevises.

D Vi ser på denne retvinklede trekant, hvor $|AD| = 10$.



Der er nu flere muligheder for at beregne længden af de to sider *DE* og *AE*.

1. I en 30-60-90-trekant er den korte katete halvt så lang som hypotenusen, dvs. $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |AD| = 5.$
   Pythagoras giver derefter
   $$|AE| = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66.$$

2. Ved hjælp af trigonometri:

   sin(60°) = $\frac{|AE|}{|AD|}$ $\Leftrightarrow$ $|AE| = |AD| \cdot \sin(60°) = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66.$

   sin(30°) = $\frac{|DE|}{|AD|}$ $\Leftrightarrow$ $|DE| = |AD| \cdot \sin(30°) = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5.$

E Arealet af *ABCD* kan fx beregnes som 4 gange arealet af trekant *ADE* (fra punkt D):

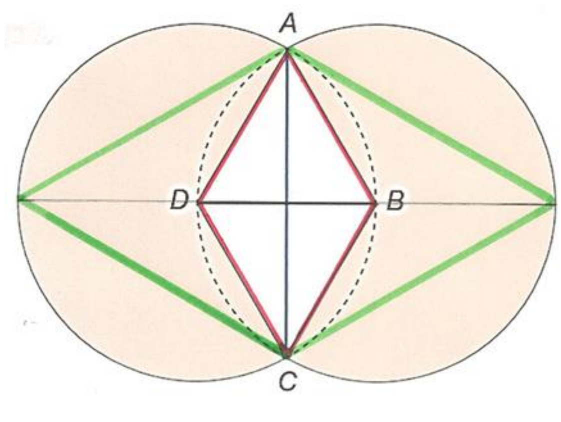
Areal(*ABCD*) = 4 · areal(*ADE*) = $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} = 50\sqrt{3} \approx 86{,}60.$

F I første oplag af MULTI 9 mangler desværre følgende oplysning: ”Punkterne *F* og *E* ligger på hver sin cirkelperiferi således, at punkterne *F*, *D*, *B* og *E* ligger på samme rette linje gennem cirklernes centre.”.

Da der er tale om to firkanter, som skal vises at være ligedannede, er det ikke nok at vise, at de to firkanter er ensvinklede. Det må yderligere vises, at firkant *FAEC* også er en rombe. Både de involverede længder (| *AB*| = | *BC*| = | *CD*| = | *DA*| = 10 og |*AE*| = | *EC*| = | *CF*| = | *FA*| = $10\sqrt{3}$) og de relevante vinkler kan bestemmes med symmetribetragtninger og trigonometri på udvalgte retvinklede trekanter.

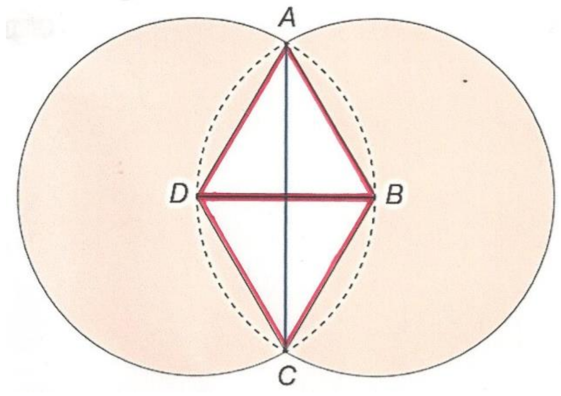
Arbejder eleverne med punkt G og H før punkt F, kan de relevante vinkler også bestemmes ved hjælp af centervinkel-periferivinkel-relationer ($\angle F = \angle E = 60°$, $\angle FAE = \angle AEC = 120°$).

Opgaven kan også løses som angivet herunder.
Vi skal vise, at den grønne og den røde firkant er ligedannede.



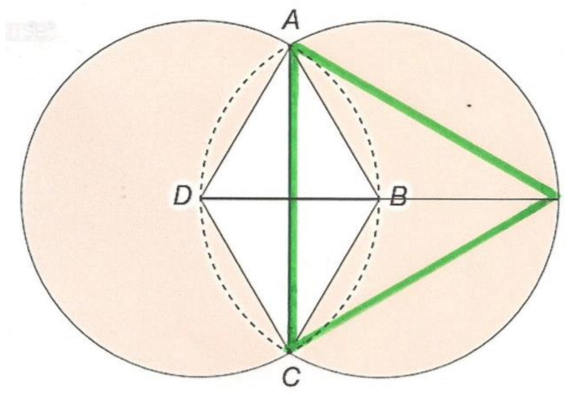
Figur 1

Vi ved, at den røde rombe er sammensat af to ligesidede trekanter *ABD* og *BCD*:



Figur 2

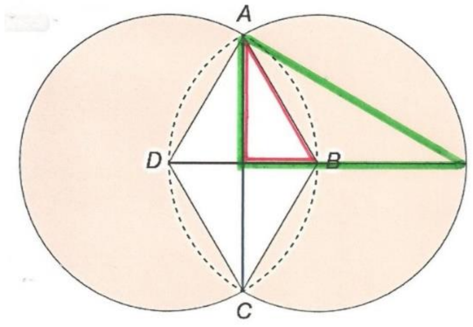
Den grønne firkant er sammensat af to kongruente trekanter, hvoraf den ene er tegnet herunder:



Figur 3

Hvis vi kan vise, at også denne grønne trekant er ligesidet, er vi færdige, for så vil de to firkanter være ensvinklede romber (de er så begge ligesidede og har begge vinkelstørrelserne $2\times60°$ og $2\times120°$). De vil derfor være ligedannede.

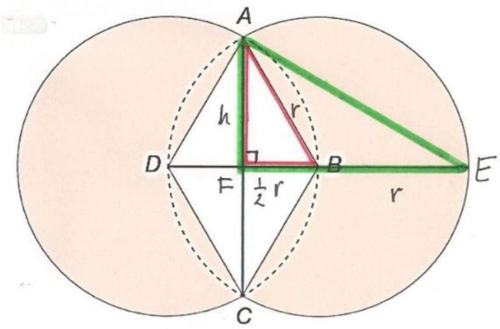
Den grønne trekant i figur 3 er imidlertid ligesidet, hvis og kun hvis den "halve" retvinklede grønne trekant i figur 4 er ligedannet med den "halve" røde trekant:



Figur 4

Nu er det trekanter, vi har med at gøre, dvs. for at vise ligedannethed er det nok at vise, at de to trekanter i ensvinklede.

Vi navngiver nogle af punkterne og linjestykkerne på figuren således, og skal derefter vise, at $\triangle ABF$ er ensvinklet med $\triangle AEF$.



$\triangle ABF$:

Vi har $\cos(B) = \frac{\frac{1}{2}r}{r} = \frac{1}{2}$, dvs. $\angle B = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$.

Vinklerne i $\triangle ABF$ er altså 30°, 60° og 90°.

I $\triangle ABF$ kan også h beregnes (Pythagoras):

$$h = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$$

$\triangle AEF$:

Her kan vi finde $\angle E$ ved hjælp af tangensfunktionen:

$$\tan(E) = \frac{\frac{1}{2}r\sqrt{3}}{\frac{1}{2}r+r} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\text{, dvs. } \angle(E) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30°$$

Vinklerne i $\triangle AEF$ er altså også 30°, 60° og 90°.

Det to trekanter er altså ensvinklede og dermed ligedannede. Altså er den grønne trekant i figur 3 ligesidet, og dermed er de to romber i figur 1 ligedannede, hvilket skulle vises.

G-H I punkt G skal eleverne undersøge, hvordan størrelsen af centervinklen *D* og størrelsen af periferivinklen *F* forholder sig til hinanden. I punkt H skal de undersøge, om ”centervinkler og periferivinkler altid forholder sig sådan til hinanden”.

Eleverne har tidligere arbejdet med samme problemstilling i 7. klasse (*MULTI 7*, side 45). Der er sikkert en del elever, der ikke husker forbindelsen mellem periferi- og centervinkler, men hvis de gør, så behøver de næppe at gennemføre en egentlig undersøgelse.

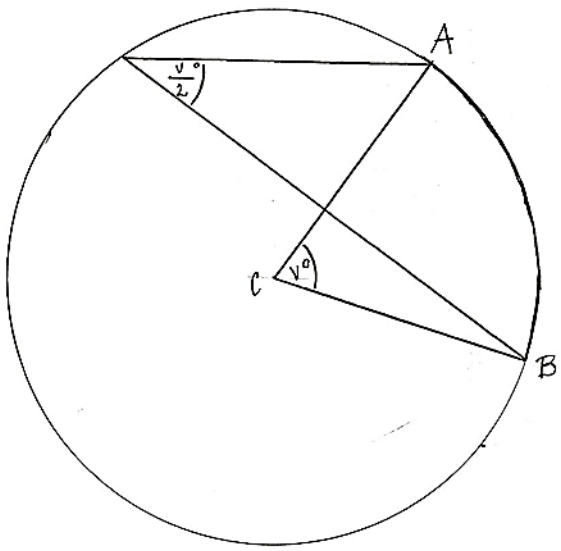
Opgaven indeholder dog en enkelt udfordring af sproglig karakter. Formuleringen i H (”om centervinkler og periferivinkler altid forholder sig sådan til hinanden”) er upræcis. Svaret er nemlig ”Nej”, med mindre man efter ”periferivinkler” tilføjer ”der spænder over samme bue”. Den matematiske sætning, der så kommer ud af det, lyder:

> En periferivinkel er halvt så stor som den centervinkel, der spænder over samme bue.

eller (hvad der naturligvis dækker over det samme):

> En centervinkel er dobbelt så stor som en periferivinkel, der spænder over samme bue.

På figuren her spænder både centervinklen og periferivinklen over buen *AB* med gradmålet $v°$.



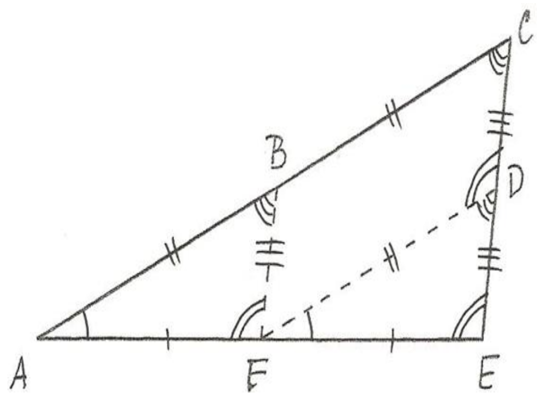
FACIT SIDE 112-113

Opgave 10

A Elevtegning af vilkårlig trekant, der skal illustrere skolegården.

B Flagstangen skal placeres i det fælles skæringspunkt for trekantens vinkelhalveringslinjer.
Begrundelse: Et punkt på halveringslinjen for en vinkel er karakteriseret ved, at afstanden fra punktet til hvert af vinklens ben er den samme. Vi ved, at trekantens tre vinkelhalveringslinjer skærer hinanden i samme punkt. Da dette punkt ligger på alle tre vinkelhalveringslinjer, har det samme afstand til alle tre sider i trekanten.

C Skolebestyrelsens ønsker bliver opfyldt. På billedet af skolegården herunder er lige store linjestykker og lige store vinkler markeret. Ligestorheden af linjestykkerne følger af, at *BF* og *FD* er midtpunktstransversaler og dermed halvt så lange som og parallelle med hhv. *CE* og *AC*. De lige store vinkler bliver derved ensliggende vinkler ved parallelle linjer.



Opgave 11

A Havens areal er $25{,}5 \cdot 18{,}25 \approx 465{,}4$ m^2.

B Arealet af 1 græsrulle er $0{,}16 \cdot 1{,}64 \approx 1{,}00$ m^2. Der skal derfor bruges 466 ruller for at dække hele haven. Så vil der være $\frac{3}{5}$ rulle (= 0,6 m^2) til overs.

C En palle rummer 60 m^2, og hver græsrulle måler 1 m^2. Altså rummer en palle 60 græsruller.

D Peter skal have leveret $465{,}4 : 60 \approx 7{,}75$ paller, dvs. 8 paller, hvoraf de 7 er fulde og én er $\frac{3}{4}$ fuld.

E Peter skal i alt betale:

Rullegræs:	$466 \cdot 17{,}40 \cdot 1{,}215$	= 10.135,50 kr.
Levering:	$1.725 \cdot 1{,}25$	= 2.156,25 kr.
Paller:	$8 \cdot 142$	= 1.136,00 kr.
Samlet pris:		13.427,75 kr.

Opgave 12

A Længden L af den inderste bane er lig med 2 · 84,39 m plus omkredsen af en cirkel med radius $\frac{1}{2} \cdot (73 + 2 \cdot 0{,}3) = 36{,}8$ m. Længden bliver da:
$L = 2 \cdot 84{,}39 + 2 \cdot \pi \cdot 36{,}8 \approx 400{,}00$ m.

B Sofie skal løbe 500 : 400 = 12,5 omgange på bane 1.

C Sofie løber de 5000 m på 5 : 15,7 ≈ 19,1082 minutter, og 0,1082 minutter svarer til 60 · 0,1082 ≈ 6,5 sekunder.
Sofie er altså 19 minutter og 6,5 sekunder om at løbe de 5000 m.

D Sofies gennemsnitsfart i m/s er v = 5000 : (18 · 60 + 24) = 4,53 m/s.
Angiver vi hendes fart i km/t får vi $v = 5 : \left(\frac{18}{60} + \frac{24}{3600}\right)$ = 16,30 km/t.

E Det antages, at begge piger løber med uændret fart.
Sofie løber de første 1500 m på 1,5 : 15,9 time.
På den samme tid løber Anna 16,3 · (1,5 : 15,9) ≈ 1,5377 km = 1537,7 m.
Anna er altså 37,7 m foran Sofie, når Sofie har løbet 1500 m.

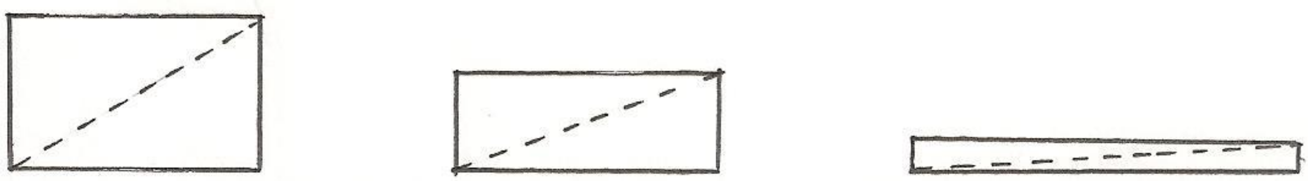
F Idet x timer er $3600x$ sekunder, har vi, at de 5000 meter løbes af
Anna på $\frac{5}{16{,}3} \cdot 3600$ = 1104, 3 s.
Sofie på $\frac{5}{15{,}9} \cdot 3600$ = 1132, 1 s.
Altså løb Anna de 5000 m 1132,1 – 1104,3 = 27,8 s. hurtigere end Sofie.

Opgave 13

A Diagonalen er 27 · 2,54 = 68,58 cm.

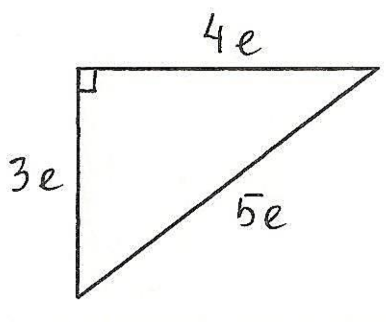
B Elevtegning af to (forskellige) rektangler med en diagonal på 68,58.
Da eleverne i næste opgave skal undersøge forskellige arealer, kan det være hensigtsmæssigt at tegne de to rektangler i et geometriprogram. Rektanglerne kan dog også tegnes i et (elevvalgt) længdeforhold, der bevirker at tegningen kan være på et stykke A4-papir.

C Undersøgelse af om rektanglets areal er uændret, når længden af diagonalen er den samme. Det er det oplagt ikke. Arealet kan fx komme så tæt på 0 (nul) som man ønsker ved at gøre rektanglets korte sider mindre og mindre (og dermed de lange sider længere og længere, men altid mindre end diagonalen) som antydet på denne skitse, hvor diagonalerne i de tre rektangler har samme længde, og hvor arealerne af rektanglerne bliver mindre og mindre.



Skitse

D Hvis vi bruger en (endnu ukendt) enhed *e*, fortæller Pythagoras, at hvis den ene katete i en retvinklet trekant er 3*e* og den anden er 4*e*, så er hypotenusen 5*e*.



Målt i cm gælder da: 5*e* = 27 · 2,54 ⇔ $e = \frac{27}{5} \cdot 2{,}54$.

Derved bliver længden af den længste side: $4e = 4 \cdot \frac{27}{5} \cdot 2{,}54 = 54{,}86$ cm,

sådan som Marcus har beregnet.

E Skærmens korte side er: $3e = \frac{27}{5} \cdot 2{,}54 \cdot 3 = 41{,}15$ cm.

F Arealet af en 4:3-27 tommer skærm er: 54,86 · 41,15 = 2257,49 cm^2.

G Vi ser nu på en 16:9-27 tommer skærm. Som i punkt D får vi (med en ny enhed *e*), at diagonalen er: $e \cdot \sqrt{16^2 + 9^2} = e\sqrt{337}$.

Den nye enhed *e* er da lig med: $e = \frac{27}{\sqrt{337}} \cdot 2{,}54$ cm.

Skærmens areal A er 16*e* · 9*e* = 144e^2, dvs.: $A = 144 \cdot \frac{27}{337}^{2} \cdot 2{,}54^2$ = 2009,68 cm^2.

Det er således 4-3-skærmen Marcus skal vælge, hvis han ønsker skærmen med det største areal.

FACIT SIDE 114-115

Opgave 14

A Rumfang af

Figur 1:	1980 dm^3 = 1 980 000 cm^3
Figur 2:	1280 cm^3
Figur 3:	$144\pi \approx 452{,}39$ dm^3
Figur 4:	72 dm^3 = 0,072 m^3
Figur 5:	$\frac{500}{3}\pi \approx 523{,}60$ cm^3
Figur 6:	196π $dm^3 \approx$ 615,75 dm^3 = 6 157 500 cm^3
Figur 7:	$11\,250\pi \approx 35\,342{,}9$ cm^3
Figur 8:	$64\,000\pi \approx 201\,061{,}9$ cm^3

B Overfladeareal af

Figur 1:	998 dm^2 = 99 800 cm^2
Figur 2:	Højden i hver sidetrekant kan beregnes til 17 cm (Pythagoras). Overfladen bliver da 800 cm^2.
Figur 3:	$104\pi \approx 326{,}7$ dm^2.
Figur 4:	1,179 m^2 = 117,9 dm^2.
Figur 5:	$100\pi \approx 314{,}16$ cm^2.
Figur 6:	Den krumme overflade i en kegle med grundfladeradius *r* og højde *h* kan beregnes som $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$. Den samlede overflade er: $\pi\cdot(49+7\sqrt{193}) \approx 459{,}45$ dm^2.
Figur 7:	$1875\pi \approx 5890{,}49$ cm^2
Figur 8:	$56\pi \approx 175{,}93$ dm^2 = 17 592,92 cm^2

Opgave 15

A Sidelængden er $\sqrt[3]{166{,}357} \approx 5{,}45$ cm.

B *h* = 17 cm

C $d = \sqrt{\frac{804{,}248}{4\pi}} \approx 16{,}00$ cm

Opgave 16

A *V* = 1,19 cm^3

B 455 g

C 17,66 ton

D 139,51 cm^3

E 2565 g

Opgave 17

A $|AC| = 10\sqrt{137} \approx 117{,}05$ cm

$|CF|$ = 50 cm

$|DG| = 10\sqrt{130} \approx 114{,}02$ cm

$|BH| = 10\sqrt{146} \approx 120{,}83$ cm

UNDERSØGELSE
KEGLESTUB OG PYRAMIDESTUB

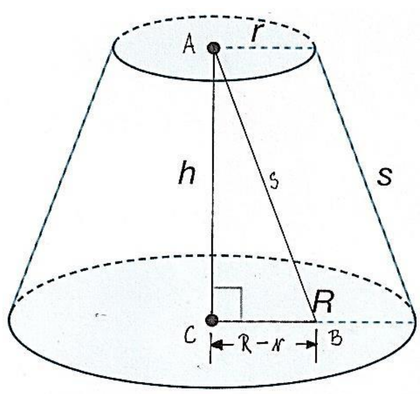
DEL 1
I første oplag af MULTI 9 er samme variabelnavn (*h*) ved en fejltagelse brugt i to forskellige betydninger og med to forskellige værdier. Højden i den lille (øvre) kegle skal hedde h_1 (h_1 = 3), og højden i den store kegle skal hedde h_2 (h_2 = 6).

A Elevdiskussion og forklaring.
Rumfang og krum overflade af keglestubben kan findes som differens mellem rumfang/krum overflade af den ”store” (oprindelige) kegle og den ”lille” (bortskårne) kegle.

B Rumfanget af den lyseblå keglestub er:
$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \pi \cdot 1^2 = 7\pi \approx 21{,}99$.
Den krumme overflade af den lyseblå kegle er:
$O = \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{2^2+6^2} - \pi \cdot 1 \cdot \sqrt{1^2+3^2} = 11\pi\sqrt{10} \approx 109{,}28$.

DEL 2
A Keglestubbens rumfang er:
$V = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot \pi \cdot (22^2 + 12^2 + 22 \cdot 12) = 4460\pi \approx 14\,011{,}50$ cm^3.
Keglestubbens krumme overflade er:
$O = \pi \cdot (22 + 12) \cdot \sqrt{(22-12)^2 + 15^2} = 170\pi \cdot \sqrt{13} \approx 1925{,}62$ cm^2.

B Hvis siden *s* parallelforskydes stykket *r* mod venstre i nedenstående figur, opstår den retvinklede trekant *ABC* med kateterne *h* og *R – r* og med hypotenusen *s*.
Bruger man Pythagoras på denne trekant, får man $s = \sqrt{(R-r)^2 + h^2}$ som ønsket.



C Keglestubbens sidelængde *s* er $5\sqrt{13}$ = 18,03 cm.

DEL 3
A Også i denne del er samme variabelnavn (*h*) ved en fejltagelse brugt i to forskellige betydninger og med to forskellige værdier. Højden i den lille (øvre) pyramide skal hedde h_1 (h_1 = 12), og højden i den store pyramide skal hedde h_2 (h_2 = 24).

Højden i hver af de fire kongruente sidetrekanter kalder vi *h*. Den kan beregnes ud fra den ”indre” retvinklede trekant, der er antydet på bogens figur (kateter 7 og 24).
Vi får da: $h = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625}$ = 25.
Arealet af en af pyramidens skrå sideflader er da: $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 14 = 175$.

B Pyramidens totale overfladeareal er $4 \cdot 175 + 14^2 = 896$.

C Elevdiskussion og forklaring.
Det totale overladeareal af en pyramidestub kan fx findes som:
Det totale overfladeareal af den ”store” pyramide minus
arealet af de fire sidetrekanter i den ”øvre” (fraskårne) pyramide plus
arealet af bunden i den ”øvre” pyramide.

D Det totale overfladeareal af den ”store” pyramide er beregnet i DEL 3, punkt B til 896.
Højden *h* i de fire sidetrekanter i den ”øvre” pyramide er: $h = \sqrt{12^2 + 3{,}5^2} = 12{,}5$.
Arealet af de fire sidetrekanter er derfor $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12{,}5 \cdot 7 = 175$.
Arealet af bunden af den ”øvre” pyramide er $7^2 = 49$.
Det totale areal af den lysegrønne pyramidestub er derfor: $O = 896 - 175 + 49 = 770$.

DEL 4

A Pyramidestubbens rumfang er $\frac{1}{3} \cdot 18 \cdot \left(49 + 25 + \sqrt{49 \cdot 25}\right) = 654$ cm^3.

FACIT SIDE 116-117

Opgave 18

A En tennisbold må højst veje 2,095 · 28,35 ≈ 59,393 g.

B Da 2,7 inches (engelske tommer) svarer til 6,858 cm, er 1 inch = $\frac{6,858}{2,7} \approx$ 2,54 cm.

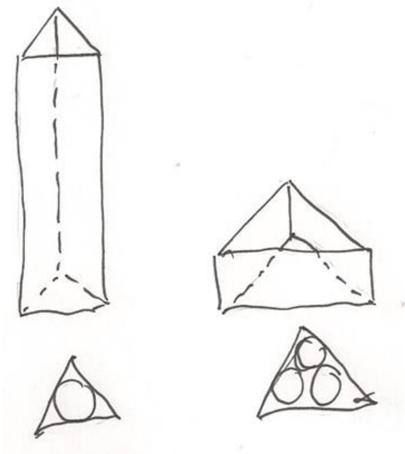
C Boldenes diameter er højst 2,7 · 2,54 = 6,86 cm.
Hvis boldene ligger lige efter hinanden som på figuren i bogen, vil de indvendige mål på en kasse med tre bolde være:
6,86 × 6,86 × 3 · 6,86 = 6,86 cm × 6,86 cm × 20,58 cm.

D Tykkelsen af pappet er ikke oplyst, så vi beregner de indvendige mål. Overfladen er da: O = 4 · 6,86 · 20,58 + 2 · $6,86^2$ = 658,83 cm^2.

E Kassens rumfang er $6,86^2$ · 20,58 = 968,49 cm^3.
Boldenes rumfang er $3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{6,86}{2}\right)^3$ = 507,10 cm^3.
Det betyder, at $\frac{507,10}{968,49} \cdot 100$ % = 52,36 % af kassens rumfang er fyldt ud med bolde.

F Elevbeskrivelse med argumentation for valg af emballage.
Overfladearealet af en cylinder, der kan rumme tre bolde er:
$O = \pi \cdot 6,86 \cdot 3 \cdot 6,86 + 2 \cdot \pi \cdot 3,43^2 \approx 517,45$ cm^2.

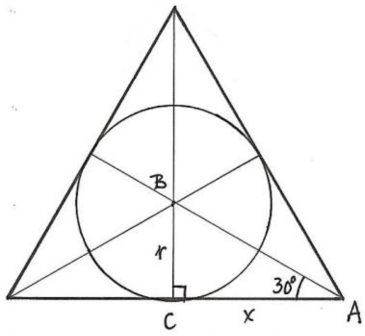
G Elevskitser til to prismeformede beholdere med trekantet grundflade (ligesidet). Boldene kan ligge oven på hinanden eller ved siden af hinanden.



Skitser. Beholderne set skråt ovenfra/forfra og ovenfra.

H Det materiale, der medgår til "limflapper", kan vælges forskelligt, og det medregnes derfor ikke her.
Materialet til begge beholdere består af to trekantede bunde og tre rektangulære sider. Det er uproblematisk at finde arealet af siderne, så her gås i dybden med de to ligesidede trekanter. Det gælder for dem begge, at kan vi finde sidelængden, så kan vi også finde arealet (fx ved brug af Herons formel). Hvis sidelængden i en ligesidet trekant er s, vil arealet være $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$.

Den høje beholder.
Grundfladetrekanten med den indlagte bold ser ud som vist til højre:



Trekantens tre højder er indtegnet. Da trekanten er ligesidet, er de tre højder samtidig vinkelhalveringslinjer og medianer. Det betyder, at vi har følgende oplysninger om den markerede trekant *ABC*:

- Vinkel *C* er ret, da linjen gennem *B* og *C* er en højde.
- Stykket *x* er det halve af sidelængden *s*, da linjen gennem *B* og *C* er en median.
- Vinkel *A* = 30°, da linjen gennem *A* og *B* er vinkelhalveringslinje, og da vinklerne i den ligesidede trekant alle er 60°.

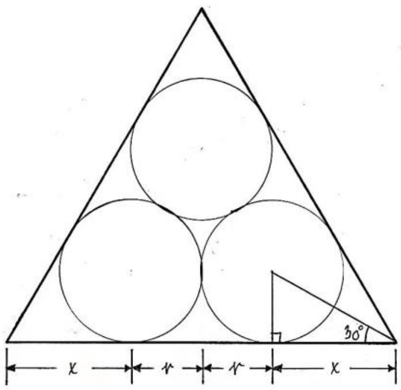
Vi har derfor: $\tan(30°) = \frac{r}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{r}{\tan(30°)}$

Da radius *r* = 3,43 cm er sidelængden *s* i trekanten er $s = 2 \cdot \frac{3{,}43}{\tan(30°)}$ = 11,88 cm.

Nu kan materialeforbruget (beholderens overflade) beregnes til:

O = 2 trekanter + tre rektangler = $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 11{,}88^2 + 3 \cdot (11{,}88 \cdot 3 \cdot 6{,}86) \approx 855{,}70$ cm^2.

Den lave beholder.
Grundfladetrekanten med de tre bolde ser således ud:



Af den lille retvinklede trekant fås som før:

$\tan(30°) = \frac{r}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{r}{\tan(30°)}$

Af figuren ses også, at siden *s* er lig med

$2 \cdot x + 2r = 2 \cdot \frac{3{,}43}{\tan(30°)} + 2 \cdot 3{,}43$ = 18,74 cm.

Materialeforbruget (overfladearealet) af denne beholder er derfor:

O = to trekanter + tre rektangler =

$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 18{,}74^2 + 3 \cdot 18{,}74 \cdot 6{,}86 \approx 689{,}81$ cm^2.

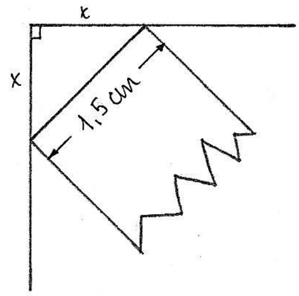
I Elevforslag til papkasse med plads til 12 elevvalgte beholdere.

Opgave 19

A Eleverne viser ved beregning eller tegning målene på de enkelte dele af den ydre kasse:

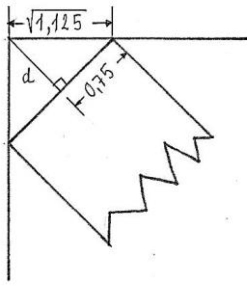
Top- og bundstykke er 40 (bredde) × 38,5 (dybde) cm.
Sidestykkerne er 37 (højde) × 38,5 (dybde) cm.
Bagstykket er 40 × 40 cm.

B Kasseåbningens indvendige mål er 37 × 37 cm. Diagonalen i kassen er derfor $37\sqrt{2}$ cm lang (Pythagoras), men den skrå skillevæg kan ikke være så lang. Betragter vi et hjørne af vinreolen, ser det således ud:



I den ligebenede, retvinklede hjørnetrekant kan kateternes længde *x* beregnes til $\sqrt{1{,}125}$ (Pythagoras): $x^2 + x^2 = 1{,}5^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1{,}5^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{1{,}125}$

Længden *d* af "det manglende stykke" ud til hjørnet kan – atter ved hjælp af Pythagoras – beregnes af den "lille" retvinklede trekant:



$$d = \sqrt{\sqrt{1{,}125}^2 - 0{,}75^2} = \sqrt{0{,}5625} = 0{,}75 \text{ cm.}$$

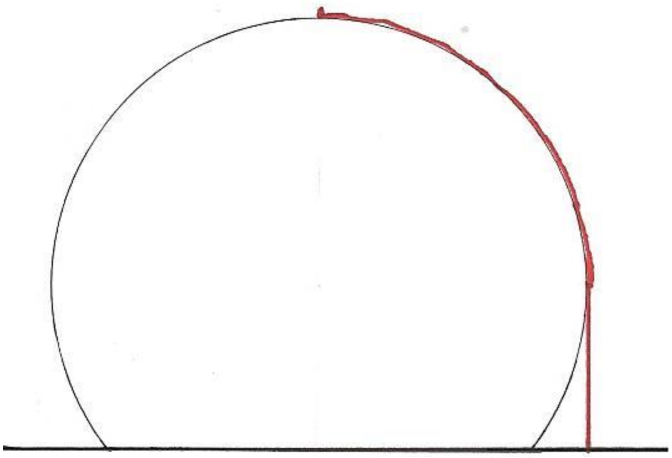
Længden af den skrå hylde er derfor $37\sqrt{2} - 2 \cdot 0{,}75 \approx 50{,}83$ cm.

Opgave 20

A Globens diameter betegnes *d*. Idet omkredsen er 345,58 m gælder:
$\pi \cdot d = 345{,}58 \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{345{,}58}{\pi} = 110{,}00$ m.

B I den retvinklede trekant *ABC* gælder:
$\tan(54{,}82°) = \frac{|AC|}{20} \quad \Leftrightarrow \quad |AC| = 20 \cdot \tan(54{,}82°) \approx 28{,}37$ m.
Fra jordoverfladen til globens ækvator er der derfor 28,37 + 1,70 = 30,07 m.
Globens samlede højde er da (idet r = 55 m): H = 30,07 + 55 = 85,07 m.

C Elevskitse. Nok noget i denne retning:



D

Den kvarte cirkelomkreds:	$\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 55 = 27{,}5\pi \approx 86{,}39$ m.
Det lodrette stykke:	30,07 m.
Ekstra reb til sikring:	3,00 m.
Reblængde i alt:	119,46 m.

Opgave 21

A Glassets (keglestubbens) rumfang er:

$V = \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot \pi \cdot (4{,}5^2 + 3^2 + 4{,}5 \cdot 3) = 99{,}75\pi \approx 313{,}37\ \text{cm}^3 = 313{,}37$ mL.

B Glasset kan indeholde 313,37 · 1,35 = 423,05 g honning.

C Elevundersøgelse. Intet fast facit.

D Fremlæggelse af besvarelsen for et andet makkerpar.

FACIT SIDE 118-119

Opgave 22

A Elevbeskrivelser (-definitioner) af de anførte begreber. Mange formuleringer er mulige.

Opgave 23

A Elevtegning i et digitalt værktøj.

B Der er mange forskellige flytninger og sammensætninger af flytninger, som afbilder trekant *ABC* i de øvrige 7 trekanter. Dette skal altså opfattes som forslag.
Trekant *ABC* afbildes i

trekant 1 ved en spejling i *y*-aksen.
trekant 2 ved en glidespejling: Der spejles i *y*-aksen og parallelforskydes efter vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
trekant 3 ved en drejning på 180° om punktet (0, 1).
trekant 4 ved en drejning på 180° om punktet (0, 0).
trekant 5 ved en parallelforskydning efter vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
trekant 6 ved en spejling i linjen med ligningen *y* = 1.
trekant 7 ved en spejling i *x*-aksen.

Opgave 24

A Som det ses af figuren, kan vektoren optræde som hypotenuse i en retvinklet trekant med kateterne 3 og 4. Længden $|\vec{u}|$ kan derfor beregnes til

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

B Hvis en vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *ikke* er akseparallel (begge koordinater ≠ 0), vil den i lighed med $\vec{u}$ i punkt A kunne opfattes som hypotenuse i en retvinklet trekant med kateterne $|x|$ og $|y|$. Ved brug af Pythagoras på denne trekant følger det ønskede:

$$|\vec{v}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Denne del af forklaringen (beviset) er knyttet til og afhængig af, at den retvinklede trekant eksisterer. Hvis vektoren er akseparallel (*x* eller *y* lig med 0), eksisterer den omtalte retvinklede trekant ikke, men ved efterprøvning kan man se, at formlen også gælder i dette tilfælde, fx vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ (med længden $|y|$):

$$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + y^2} = |y|$$

Sluttelig bør man efterprøve, at også for nulvektoren $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ med længden 0 gælder formlen.

Opgave 25

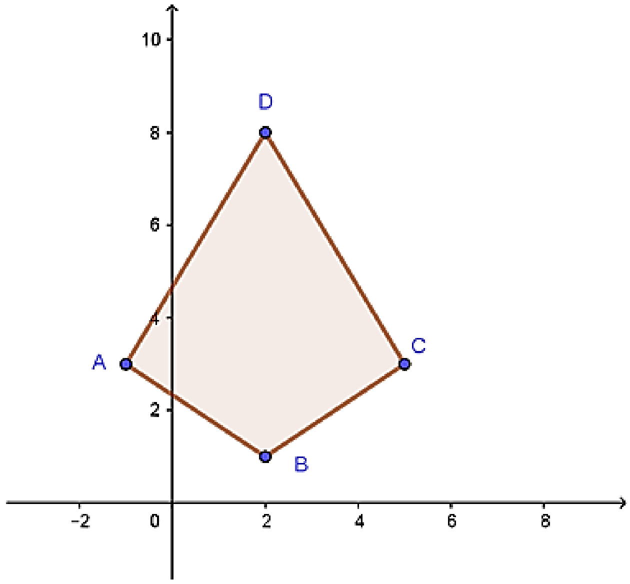
Ingen faste facits i denne opgave.

A-B Tegning i et digitalt værktøj samt forklaring på, hvordan tegningerne er blevet til.

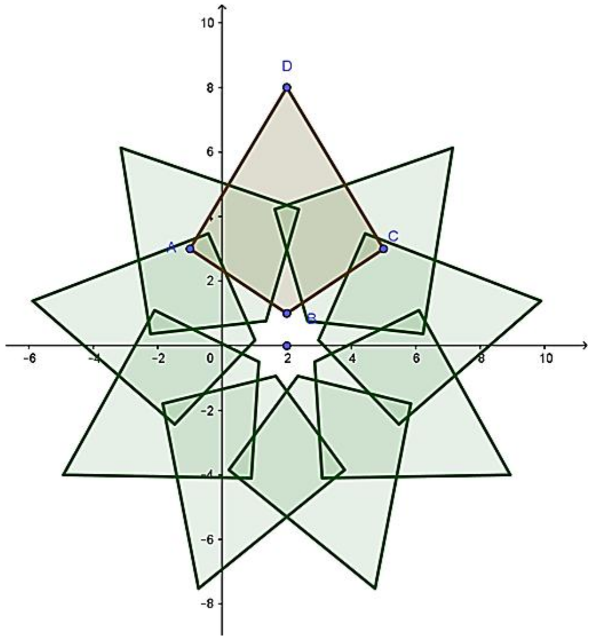
C Beskrivelse af figurerne.

Opgave 26

A-B



C



D Den samlede drejningsvinkel skal være 360°, og da 360 : 40 = 9, skal drejningen foretages 9 gange før, vi er "hele vejen rundt".

E Undersøgelsen kan foretages ved at udføre de beskrevne drejninger og iagttage i hvilke tilfælde, der er "succes". Det er dog lettere at se, hvornår drejningsvinklen er divisor i 360°. Man finder da, at drejningsvinklen
v = 30° fører figuren over i sig selv efter 360 : 30 = 12 drejninger,
v = 50° ikke fører figuren over i sig selv, når man drejer "hele vejen rundt",
v = 60° fører figuren over i sig selv efter 360 : 60 = 6 drejninger,
v = 120° fører figuren over i sig selv efter 360 : 120 = 3 drejninger,
v = 125° ikke fører figuren over i sig selv, når man drejer "hele vejen rundt",
v = 160° ikke fører figuren over i sig selv, når man drejer "hele vejen rundt".

F Betingelsen for, at en drejningsvinkel fører figuren over i sig selv efter én hel omdrejning, er, at drejningsvinklen er divisor i 360 – og det er naturligvis ikke alle vinkler, der er det.

Opgave 27

A De to første friser føres over i sig selv ved parallelforskydninger og glidespejlinger.
Den sidste føres over i sig selv ved en parallelforskydning.
Alle tre friser føres over i sig selv ved en drejning på 180° og et vilkårligt punkt på en linje midt i båndet.

C Intet fast facit.

D Makkerbytte af opgaver.

Opgave 28

A Elevanalyse af den enkelte flise og af det fladedækkende mønster.
Flisen har linjesymmetri om sidernes midtnormaler og om diagonalerne.
Flisen har drejningssymmetri om diagonalernes skæringspunkt med drejningsvinklerne 90°, 180° og 270°.
Mønsteret har de samme symmetrier med udgangspunkt i en vilkårlig valgt flise.
Desuden linjesymmetri om enhver fuge og drejningssymmetri (90°, 180°, 270°) om ethvert fugeskæringspunkt.

B Elevtegning. Intet fast facit.

C Elevbeskrivelse. Intet fast facit.

FACIT SIDE 120-121

TEMA: GYLDNE REKTANGLER OG GYLDNE TREKANTER

DEL 1

A Elevtegning af gyldent rektangel, hvor den længste side er 10.
Der er ikke i bogen angivet nogen enhed. Hvis man lader den længste side være 10 cm, skal den korteste være:

$$\frac{10}{\phi} = \frac{10}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \approx 6{,}2 \text{ cm.}$$

B Hvis den korteste side i et gyldent rektangel er 7 cm, vil den længste være:

$$7\varphi = \frac{7+7\sqrt{5}}{2} \approx 11{,}33 \text{ cm.}$$

C Hvis hotellets korteste side betegnes *x*, er *x* løsning til ligningen

$$\varphi \cdot x = 69{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{69{,}9}{\phi}$$

Vi får så

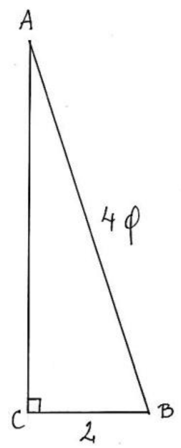
$$x = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot 69{,}9 \approx 43{,}20 \text{ m.}$$

DEL 2

A Elevtegning af gylden trekant med den korte side lig med 5. Bruger vi cm som enhed vil de længste sider være:

$$5\varphi = \frac{5+5\sqrt{5}}{2} \approx 8{,}09 \text{ cm.}$$

B Alle gyldne trekanter er ligedannede og dermed ensvinklede. Vi kan derfor tage udgangspunkt i trekanten fra bogen, og udtage en retvinklet trekant således:



Vi har da: $\cos(B) = \frac{2}{4\phi} = \frac{2}{\frac{4+4\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$, hvoraf vi får $\angle B = 72°$.

Grundvinklerne i en gylden trekant er altså 72°, og topvinklen er derfor

$$180° - 2 \cdot 72° = 36°.$$

DEL 3

A-B Intet fast facit.

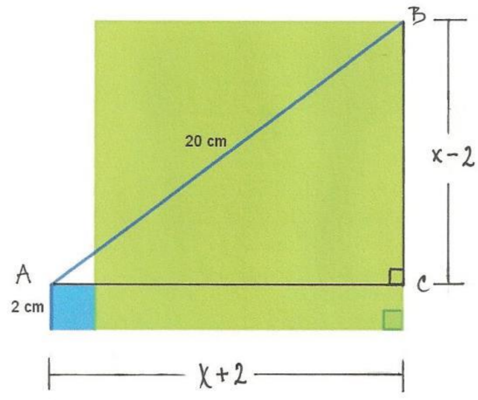
EVALUERING

DEL 1-2

A-E Elevaktiviteter. Eleverne forklarer betydningen af de begreber, de har lært om.

DEL3

A Vi betegner siden i det grønne kvadrat med *x*. Det søgte areal er da x^2.
I figuren indlægges en retvinklet trekant *ABC* således:



Trekant *ABC* har da hypotenusen 20, den lodrette katete er $x - 2$, og den vandrette katete er $x + 2$.
Ved brug af Pythagoras får vi da:
$(x-2)^2 + (x+2)^2 = 20^2$
$\Leftrightarrow\ x^2 + 4 - 4x + x^2 + 4 + 4x = 400$
$\Leftrightarrow\ 2x^2 + 8 = 400$
$\Leftrightarrow\ 2x^2 = 392$
$\Leftrightarrow\ x^2 = 196$

Altså er arealet af det grønne kvadrat lig med 196 cm^2.

DEL 4

A 1,5 L svarer til 1500 cm^3. Hvis målebægerets højde betegnes *h*, skal der derfor gælde:

$$(h - 1{,}5) \cdot \pi \cdot 5{,}5^2 = 1500 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{1500}{\pi \cdot 5{,}5^2} + 1{,}5 \approx 17{,}3 \text{ cm.}$$

B

- 150 mL svarer til 150 cm^3. Mærket skal derfor stå i højden h_1, hvor
$$h_1 \cdot \pi \cdot 5{,}5^2 = 150 \quad \Leftrightarrow \quad h_1 = \frac{150}{\pi \cdot 5{,}5^2} \approx 1{,}6 \text{ cm.}$$
- 7 dL svarer til 700 cm^3. Mærket skal derfor stå i højden h_2, hvor
$$h_2 \cdot \pi \cdot 5{,}5^2 = 700 \quad \Leftrightarrow \quad h_2 = \frac{700}{\pi \cdot 5{,}5^2} \approx 7{,}4 \text{ cm.}$$
- 1,2 L svarer til 1200 cm^3. Mærket skal derfor stå i højden h_3, hvor
$$h_3 \cdot \pi \cdot 5{,}5^2 = 1200 \quad \Leftrightarrow \quad h_3 = \frac{1200}{\pi \cdot 5{,}5^2} \approx 12{,}6 \text{ cm.}$$

C

- 100 g sukker fylder 117,6 cm^3. Mærket skal derfor stå i højden h_4, hvor

$$h_4 \cdot \pi \cdot 5{,}5^2 = 117{,}6 \quad \Leftrightarrow \quad h_4 = \frac{117{,}6}{\pi \cdot 5{,}5^2} \approx 1{,}2 \text{ cm.}$$

- 0,75 kg sukker fylder 882,4 cm^3. Mærket skal derfor stå i højden h_5, hvor

$$h_5 \cdot \pi \cdot 5{,}5^2 = 882{,}4 \quad \Leftrightarrow \quad h_5 = \frac{882{,}4}{\pi \cdot 5{,}5^2} \approx 9{,}3 \text{ cm.}$$

- 5 dL sukker fylder 500 cm^3. Mærket skal derfor stå i højden h_6, hvor

$$h_6 \cdot \pi \cdot 5{,}5^2 = 500 \quad \Leftrightarrow \quad h_6 = \frac{500}{\pi \cdot 5{,}5^2} \approx 5{,}3 \text{ cm.}$$

D 1,5 L svarer til 1500 cm^3. Sukkeret vejer derfor 1500 · 0,85 = 1275 g = 1,275 kg.

DEL 5

A-B Intet fast facit.
Eleverne tegner et fladedækkende mønster, beskriver grundmotivet og forklarer, hvordan mønsteret er dannet.

FACIT SIDE 122-123

TRÆN 1 – FÆRDIGHEDER

Opgave 1

A $O = 2a + 2b + 16$

B $A = (a + 2)(b + 6) = ab + 6a + 2b + 12$

Opgave 2

A $V(\mathrm{A}) = 486$

B $O(\mathrm{A}) = 378$

C 1. Svaret kan fx findes ved også at finde rumfanget af figur B:
$V(\mathrm{B}) = 12 \cdot 18^2 = 3888$.
Da $\frac{3888}{486} = 8$, er rumfanget af B altså 8 gange så stort som rumfaget af A.
En anden måde: Det ses oplagt (?), at længdeforholdet mellem A og B er 2. Når længdeforholdet er 2, så er arealforholdet $2^2 = 4$, og rumfangsforholdet er $2^3 = 8$.

D Her nøjes vi med at bruge betragtning 2 fra spørgsmål C. Heraf ses, at overfladearealet af figur B er 4 gange så stort som overfladearealet af figur A.

Opgave 3

A 350 m = 0,350 km

B 2,5 time = 150 minutter

C 195 g = 0,195 kg

D 750 mL = 7,5 dL

Opgave 4

A $b = 5$

B $\angle B = 25°$

C Areal(ABC) = $\frac{1}{4} \cdot$ Areal(DEF) = 25

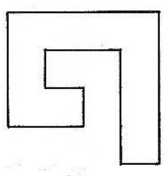
Opgave 5

A $O = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 8 + 2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 40\pi \approx 125{,}66$

B Fra ligningen $O = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$ fås: $h = \frac{O - 2\pi r^2}{2\pi r}$
Indsætter vi de aktuelle værdier for O og r, får vi: $h = \frac{250 - 2\pi \cdot 5^2}{2\pi \cdot 5} \approx 2{,}96$.

Opgave 6

A Grundmotiv:



B Elevtegning og tegneforklaring

C Elevbeskrivelse

TRÆN 2 - FÆRDIGHEDER

Opgave 1

A $O = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} + 16$

B $A = \frac{1}{2}ab + 6a + 2b + 12$

Opgave 2

A $V(\text{A}) = a^2b$

B $O(\text{A}) = 2a^2 + 4ab$

C Da det lineære forhold (længdeforholdet) mellem figur A og figur B er 2, vil rumfangsforholdet være $2^3 = 8$. Rumfanget af figur B er derfor 8 gange så stort som rumfanget af figur a.

D Da det lineære forhold (længdeforholdet) mellem figur A og figur B er 2, vil arealforholdet være $2^2 = 4$. Overfladearealet af figur B er derfor 4 gange så stort som overfladearealet af figur A.

Opgave 3

A 1,9 km = 1900 m

B 105 minutter = 1,75 time (1 time, 45 minutter)

C 11,25 kg = 11.250 g

D 19,5 dL = 1950 mL

Opgave 4

A $|DE| = 10$

B $\angle CDE = 55°$

C Areal($ACDF$) = $\frac{1}{4}$ Areal($GIJL$) = 15

Opgave 5

A $O = \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{2^2 + 8^2} + \pi \cdot 2^2 = \left(4\sqrt{17} + 4\right) \cdot \pi \approx 64{,}38$

B I første oplag af *MULTI* 9 er keglens samlede overflade ved en fejl angivet til 100. Det skulle have været 250.

Højden h er da løsning til ligningen

(*) $\quad \pi \cdot 5 \cdot \sqrt{5^2 + h^2} + \pi \cdot 5^2 = 250$

Her kan vi i første omgang isolere rodstørrelsen $\sqrt{5^2 + h^2}$ $\left(= \sqrt{25 + h^2}\right)$:

$\sqrt{25 + h^2} = \frac{250 - \pi \cdot 5^2}{\pi \cdot 5} = \frac{50}{\pi} - 5$

Heraf fås (ved opløftning af begge sider til anden potens)

$25 + h^2 = \left(\frac{50}{\pi} - 5\right)^2$ som giver $h = \frac{10}{\pi}\sqrt{25 - 5\pi} \approx 9{,}70$.

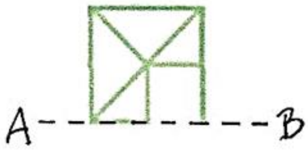
Den tilsvarende negative rod har naturligvis ingen interesse her.

Løsningen af ligningen kan være en ”kradsbørstig” affære, og mange elever vil måske foretrække at løse ligningen (*) med et CAS-værktøj eller ved hjælp af et regneark og ”gæt-og-prøv-efter”-metoden. Det er naturligvis helt acceptabelt.

Opgave 6

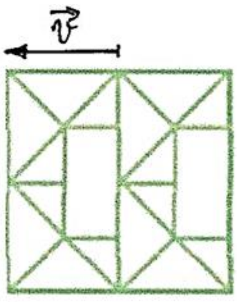
A Ved grundmotivet i en frise vil vi forstå den mindste figur, der ved hjælp af flytninger kan ”fremstille” hele frisen. Grundmotivet i frisen er da denne figur:

B Elevtegning og forklaring.
Ved spejling i linjen *AB*



fremkommer denne figur:

Og ved gentagen parallelforskydning efter den viste vektor $\vec{v}$ (eller efter $-\vec{v}$)



fremkommer hele frisen:

FACIT SIDE 124-125

TRÆN 1 – PROBLEMLØSNING

Opgave 1

A Rumfanget af:

- det mindste bæger er $V_1 = \frac{1}{3} \cdot 16\pi(6^2 + 5^2 + 6 \cdot 5) = 485\frac{1}{3}\pi \approx 1525$ cm^3.
- det mellemste bæger er $V_2 = \frac{1}{3} \cdot 18\pi(8^2 + 7^2 + 8 \cdot 7) = 1014\pi \approx 3186$ cm^3.
- det største bæger er $V_3 = \frac{1}{3} \cdot 22\pi(10^2 + 8^2 + 10 \cdot 8) = 1789\frac{1}{3}\pi \approx 5621$ cm^3.

B Literprisen for popcorn i

- det mindste bæger er 30 : 1,525 = 19,67 kr.
- det mellemste bæger er 45 : 3,186 = 14,12 kr.
- det største bæger er 60 : 5,621 = 10,67 kr.

C Intet fast facit. Der er uendeligt mange muligheder for et rigtigt svar, så hvert svar må bedømmes for sig.

D Begrundet stillingtagen til et bæger med 5,5 L popcorn.

Opgave 2

A Rumdiagonalen i

Senior-kassen er 74,94 cm.
Pro-kassen er 86,37 cm.
Junior-kassen er 62,99 cm.

B Alle tre kasser har tre forskellige kantlængder. Det betyder, at en rumdiagonal danner forskellige vinkler med de tre sider i hjørnet, så det er ikke muligt for eleverne at beregne, hvor meget mindre end rumdiagonalen en cylinder med diameteren 7 cm skal være for at få plads i kassen. Det forekommer oplagt, at plakatrøret kan være i Senior-kassen og i Pro-kassen. Det er måske ikke helt så oplagt, at røret ikke kan være i Junior-kassen, men rådet til Axel må alligevel være: Vælg Senior-kassen eller Pro-kassen.

Opgave 3

A 2 timer, 9 minutter og 54 sekunder svarer til 2 + $\frac{9}{60} + \frac{54}{3600}$ = 2,165 time.
Limos gennemsnitsfart var derfor 42,195 : 2,165 = 19,49 km/t.

B En gennemførselstid på 2 timer og 10 minutter ($\frac{13}{6}$ time) giver en gennemsnitsfart på 42,195 : $\frac{13}{6} = \frac{42{,}195 \cdot 6}{13} \approx$ 19,38 km/t.
Nu gælder det om at få eleverne til at indse, at hvis gennemsnitsfarten er *v* km/time, så bruger man $\frac{1}{v}$ time/km. Prøv med nogle nemme tal fx:

Hvis vi kører 2 km pr. time er vi $\frac{1}{2}$ time om at køre 1 km.
Hvis vi kører 30 km pr. time er vi $\frac{1}{30}$ time (2 minutter) om at køre 1 km.
Hvis vi kører 60 km pr. time er vi $\frac{1}{60}$ time (1 minut)om at køre 1 km.

Derefter ligger svaret lige for: Hvis man løber med farten $\frac{42{,}195\cdot 6}{13}$ km/time, er man $\frac{13}{42{,}195\cdot 6}$ = 0,051 timer (svarende til 3 minutter og 5 sekunder) om at løbe 1 km.

Opgave 4

A Marianne må have x m^3 perlesten på sin trailer, hvis

$x \cdot 1450 \leq 350 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 0{,}241$ m^3.

Marianne må altså højst have 0,241 m^3 perlesten på sin trailer.

B Marianne skal bruge 2,5 : 0,241 = 10, 37 trailerfulde perlesten.

TRÆN 2 – PROBLEMLØSNING

Opgave 1

A Højden h af kirkens mur kan findes af ligningen

$$\tan(35°) = \frac{h}{10} \quad \Leftrightarrow \quad h = 10 \cdot \tan(35°) \approx 7{,}00 \text{ m.}$$

B Kirkens samlede højde H kan findes af ligningen

$$\tan(39°) = \frac{H}{6+10} \quad \Leftrightarrow \quad H = 16 \cdot \tan(39°) \approx 12{,}96 \text{ m.}$$

C Keglens grundfladeradius er 6 m, og keglens højde er 12,96 – 7,00 = 5,96 m. Arealet A af kirkens tag er da

$$A = \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{6^2 + 5{,}96^2} \approx 159{,}4 \text{ m}^2.$$

D Der skal i alt bruges 159,4 · 15 ≈ 2391 tagsten.

Opgave 2

A Elevforklaring.
Trekanten er retvinklet: Vinkel B er en periferivinkel, der spænder over en diameter (en bue på 180°). Da en periferivinkel er halvt så stor som den bue, den spænder over, er vinkel B 90° – trekanten er altså retvinklet.
Trekanten er ligebenet: Da trekanten er retvinklet og vinkel A er 45° er også vinkel C lig med 45°. Da trekanten har to ens vinkler er den ligebenet.

B $|AO|$ er radius i cirklen. Cirklens omkreds er derfor $2 \cdot \pi \cdot |AO| = 20\pi$.

C Vi har $|AC| = 20$. Hvis længden af de to lige lange sider betegnes x, giver Pythagoras
$x^2 + x^2 = 20^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10\sqrt{2}$.
Omkredsen af $\triangle ABC$ er da $O = 20\sqrt{2} + 20 \approx 48{,}28$.

D Vi kan bestemme arealet af cirkelafsnittet som arealet af cirkeludsnittet OBC minus arealet af trekant OBC.
Cirkeludsnittet OBC: Vinkel A er en periferivinkel på 45°, der spænder over buen BC. Buen BC er derfor 90°. Det betyder, at cirkeludsnittet svarer til en kvart cirkel med radius 10. Det har derfor arealet $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 10^2 = 25\pi$.
Trekant OBC: Arealet kan findes på flere måder. For eksempel kan man bruge at trekanten er $\frac{1}{4}$ af et kvadrat med sidelængden $|BC| = 10\sqrt{2}$. Arealet af dette kvadrat er 200, dvs. trekantens areal er 50.
Arealet af cirkeludsnittet er derfor $25\pi - 50 \approx 28{,}54$.

E Vinkel D, E og F er alle periferivinkler, der spænder over den samme bue (bue AC). Altså er de lige store.

F Den bue, hver af periferivinklerne D, E og F spænder over, er 180°. De er derfor alle rette vinkler.